Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Dr. Lisa Hartung

11. Übungsblatt
„Analysis II"

Abgabe bis Donnerstag 14.07.16 in der Vorlesung

---

1. (Gleichmäßige Konvergenz)

a) Beweisen Sie die folgende Aussage. Seien X, Y Banachräume und sei $U \subset X$. Sei $f_n : U \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von stetigen Funktionen. Sei $f : U \to Y$, und es gelte, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist f stetig.

b) Seien X, Y Banachräume und sei $U \subset X$. Sei $f_n : U \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge von Funktionen. Sei $f : U \to Y$. Dann sagen wir, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *punktweise* gegen f konvergiert, wenn

$$\forall_{x\in U}\forall_{\epsilon>0}\exists_{n_0\in\mathbb{N}}\forall_{n\geq n_0}\|f_n(x) - f(x)\| \leq \epsilon.$$

Untersuchen Sie die folgenden Funktionenfolgen auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz, bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion und unteruschen Sie diese auf Stetigkeit.

(i) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{1}{1+nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

(ii) $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \frac{x^2+x+n}{1+nx^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$

2. (Residuen und Integrale)

Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(1+t^2)^n} dt = \frac{\pi(2n-2)!}{2^{2n-2}((n-1)!)^2}.$$

3. (Uneigentliche Integrale)

a) Es seien $\alpha > 0$ und G ein Gebiet mit $\{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathrm{Im}\ z \geq 0\} \subseteq G$ zudem gelte

(i) $x \in \mathbb{R}$ ein ganzzahliges Vielfache von $\frac{\pi}{\alpha}$ und $z_1, \ldots, z_r \in G$ seien paarweise verschieden mit $\mathrm{Im}\ z_k > 0$,

(ii) $f : G \setminus \{z_1, \ldots, z_r, x\} \to \mathbb{C}$ analytisch,

(iii) f hat in x einen einfachen Pol,

(iv) $\lim_{z\to\infty,\ \mathrm{Im}\ z\geq 0} |zf(z)| \leq C$.

(v) Für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $f(t) \in \mathbb{R}$.

Dann gilt

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\alpha t)dt = Im\left(2\pi i\sum_{k=1}^{r} e^{\mathrm{i}\alpha z_k}\mathrm{Res}(f,z_k) + \pi i e^{\mathrm{i}\alpha x}\mathrm{Res}(f,x)\right) \ .$$

Wie sollte die Formel aussehen, wenn es endlich viele einfache Pole $x_1, \ldots, x_m$ von f gibt, welche Vielfache von $\frac{\pi}{\alpha}$ sind?

b) Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi x)}{x^3+3x^2+x-5}dx.$$

Hinweis: $x^3+3x^2+x-5 = (x-1)(x+2-i)(z-2+i)$.

4. (Residuen und Fouriertransformation)

Berechnen Sie die Fouriertransformation der folgenden Funktionen.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(t) = \frac{1}{t^4+a^4}$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ mit $f(t) = \frac{1}{t^2+i}$

(d.h. berechnen Sie jeweils für $u \in \mathbb{R}$ das uneigentliche Integral $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{iut}dt$).