Institut für Angewandte Mathematik
Sommersemester 2016
Prof. Dr. Anton Bovier, Dr. Lisa Hartung

10. Übungsblatt
„Analysis II”

Abgabe bis Donnerstag 07.07.16 in der Vorlesung

---

1. (Eigenschaften von Funktionen)

a) Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion mit $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$ für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt.

b) Sei $B_1(0)$ die Kreisscheibe um 0 mit Radius 1. Sei $f : B_1(0) \to \mathbb{C}$ analytisch und für jedes $z \in B_1(0)$ gebe es ein $n_z \in \mathbb{N}_0$ mit $f^{(n_z)}(z) = 0$. Zeigen Sie, dass f ein Polynom ist.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$A_n \equiv \{z \in B_{\frac{1}{2}}(0) | f^{(n)}(z) = 0\}$$

unendlich viele Elemente enthält.

2. (Potenzreihen)
Entwickeln Sie die Funktion

$$f(z) = \frac{2z+1}{(z^2+1)(z+1)^2}, \quad z \in \mathbb{C},$$

um 0 in eine Potenzreihe (falls dies möglich ist).

3. (Analytische Fortsetzung)
Welche der folgenden Funktionen können analytisch in 0 fortgesetzt werden? Beweisen Sie Ihre Antwort!

a) $f(z) = \frac{z\cos(z)}{\sin(z)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus 2\pi\mathbb{Z}.$

b) $g(z) = \frac{z}{e^z - 1}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

c) $h(z) = z^2 \sin\left(\frac{1}{z}\right), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

4. (Residuen)

Sei $U \subset \mathbb{C}$ offen, $a \in U$, $f : U \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ analytisch. Beweisen Sie die folgenden Aussagen.

a) Hat f in a einen Pol der Ordnung $n \geq 1$, dann gilt mit $g(z) = (z-a)^n f(z)$

$$\mathrm{Res}(f, a) = \frac{g^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}$$

b) Ist g in einer Umgebung von a analytisch und hat f dort einen Pol 1. Ordnung, dann gilt

$$\mathrm{Res}(gf, a) = g(a)\mathrm{Res}(f, a).$$

c) Ist g in einer Umgebung von a analytisch und hat f dort eine Nullstelle 1. Ordnung, dann gilt

$$\mathrm{Res}\left(\frac{g}{f}, a\right) = \frac{g(a)}{f'(a)}.$$