Institut für angewandte Mathematik
Wintersemester 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

9. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 07.01.16 in der Vorlesung

Die ersten sechs Aufgaben dieses Blattes sind als Probeklausur gedacht. Die Aufgaben 1 bis 6 dürfen auch einzeln abgegeben werden, wenn sonst in einer Abgabegruppe abgegeben wird.

- Auch in der Klausur und Nachklausur wird es sechs Aufgaben mit jeweils 10 Punkten geben.
- Die Bearbeitungszeit der Klausur bzw. Nachklausur beträgt 120 Minuten.
- Es werden keine Hilfsmittel erlaubt sein.
- **Achten Sie darauf ALLE Argumentationsschritte zu begründen. Geben Sie insbesondere an, wenn sie aus der Vorlesung bekannte Aussagen verwenden und warum Sie diese verwenden dürfen.**
- **Achten Sie darauf ihre Argumentation ordentlich und verständlich zu gliedern und leserlich zu schreiben. Es sollte insbesondere erkennbar sein, wann z.B. ein Beweis beginnt und wann er endet.**

Natürlich ist der komplette nach Weihnachten behandelte Stoff auch klausurrelevant, aber nicht Inhalt der Probeklausur.

Wir raten Ihnen, die Probeklausur möglichst unter Klausurbedingungen zu bearbeiten.

Punkte für die Zulassung: Für die Zulassung zählt jede Aufgabe der Probeklausur 5 Punkte. Die in den Aufgaben 1 bis 6 erreichten Punkte, werden also durch zwei geteilt. Für die Aufgaben 7 und 8 gibt es jeweils 5 Punkte. Insgesamt gibt es somit auf diesem Blatt 40 *Übungspunkte!*

Wir wünschen Ihnen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins neue Jahr!

1. (Die natürlichen Zahlen) *[3+3+4 Pkt]*

a) Geben Sie die Peano Axiome an.

b) Beweisen Sie das Prinzip der vollständigen Induktion: Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $a(n)$ eine Aussage. Es gelte

(i) $a(1)$ ist wahr.

(ii) Wenn $a(n)$ wahr ist, dann ist auch $a(\phi(n))$ wahr, wobei $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die Nachfolger Abbildung bezeichnet.

Dann ist $a(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

c) Zeigen Sie, dass für $x > -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

gilt.

2. (Folgen) *[2+3+5 Pkt]*

a) a sei eine rationale Folge. Definieren Sie, wann a eine Cauchyfolge ist und wann a konvergent ist.

b) Zeigen Sie mit Hilfe der Definition von Folgenkonvergenz, dass die Folge a mit Folgengliedern

$$a_n = 2 + (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert. Wie viele Folgenglieder liegen in dem Intervall $[1.9; 2.05]$?

c) Betrachten sie für $t, s \in \mathbb{R}_+$ die Folge a mit Folgengliedern

$$a_n = (t^n + s^n)^{1/n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass a konvergiert und dass $\lim a = \max\{t, s\}$.

3. (Reihen und Summierbarkeit) *[3+3+4 Pkt]*

a) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz und Divergenz.

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^2}{1+n^3}$

b) Zeigen Sie, dass $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a_{n,m} = (n!m!)^{-1}$ summierbar ist. Bestimmen Sie die Summe.

4. (Sinus und Kosinus) *[3+2+5 Pkt]*

a) Geben Sie die Reihendarstellung von $\sin(x)$ und $\cos(x)$ an.

b) Beweisen Sie, dass $\sin(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ absolut konvergiert.

c) Beweisen Sie mit Hilfe der Reihendarstellung von Sinus und Kosinus, dass für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x).$$

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}.$$

5. (Stetigkeit) *[2+4+4 Pkt]*

a) Sei $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ eine auf $[a;b]$ stetige Funktion. Formulieren Sie den Zwischenwertsatz.

b) Betrachten Sie die Funktion $f : [1;2] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{5}{x^4} - x + 1.$$

Zeigen Sie, dass f eine Nullstelle besitzt.

c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen. Beweisen Sie, dass dann auch $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ eine stetige Funktion ist.

6. (Stetigkeit und Differenzierbarkeit) *[2+4+4 Pkt]*

a) Bestimmen Sie mit der Definition von Stetigkeit alle $x_0 \in \mathbb{R}$ an denen die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{mit } f(x) = |x|,$$

stetig ist.

b) Bestimmen Sie anhand der Definition alle $x_0 \in \mathbb{R}$ in denen die Funktion f differenzierbar ist. Bestimmen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$, in denen die f nicht differenzierbar ist, den Wert der linksseitigen und rechtsseitigen Ableitung (falls diese existiert).

c) Beweisen Sie:

Ist eine Funktion $g : D \to \mathbb{R}$ an einer Stelle $x \in D$ differenzierbar von links und differenzierbar von rechts und stimmen die Werte der rechtsseitigen und linksseitigen Ableitungen überein, so ist die Funktion differenzierbar in x.

Normale Übungsaufgaben

Die folgenden zwei Aufgaben sind NICHT Teil der Probeklausur und normal zu bearbeiten.

7. (Stetigkeit von Funktionen)

An welchen Punkten des Definitionsbereiches sind folgende Funktionen stetig bzw. unstetig? Beweisen Sie ihre Behauptung und skizzieren Sie den Graphen der Funktionen in a) und c).

a)
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \lfloor x \rfloor + \sqrt{x - \lfloor x \rfloor};$$

b)
$$f : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} x, & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 - x, & \text{sonst;} \end{cases}$$

c)
$$f : (-1, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}, & \text{falls } x \neq 0, \\ e, & \text{sonst;} \end{cases}$$

8. (Stetigkeit und monotone Funktionen)

a) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine injektive und stetige Funktion. Beweisen Sie, dass f entweder streng monoton wachsend oder fallend ist.

b) Die Funktionen $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ seien stetig mit mit $f(x) = g(x)$ für alle $x \in (a,b) \cap \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) = g(x)$ für sämtliche $x, y \in (a,b)$ gilt. Bleibt diese Aussage immer noch wahr, wenn nur die Stetigkeit von g gefordert wird?