**Institut für angewandte Mathematik**
**Wintersemster 2015/16**
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

# 8. Übungsblatt
# „Analysis I"

**Abgabe bis Donnerstag 17.12.15 in der Vorlesung**

---

**1. (Satz vom Cauchyprodukt)**
Seien $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen. Zeigen Sie, dass die Funktion $d : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $d_{nm} = a_n b_m$ summierbar ist und

$$\lim S \lim T = \sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} d_{nm}$$

gilt. $\sum_{(n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} d_{nm}$ nennt man *Cauchyprodukt*.

**2. (Berechnung des Konvergenzradiuses)**
Sei $a$ eine reelle Folge und sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die dazugehörige Potenzreihe mit Konvergenzradius $r$.

a) *(Eulersche Formel)* Zeigen Sie, dass dann

$$R = \frac{1}{q} \quad \text{mit } q = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|,$$

falls dieser Grenzwert existiert.

b) *(Cauchy-Hadamard)* Zeigen Sie, dass dann

$$R = \frac{1}{L} \quad \text{mit } L = \limsup_{n \to \infty} (a_n)^{1/n}.$$

*Anmerkung:* In Aufgabenteil a) und b) setzt man in diesem Zusammenhang $\frac{1}{0} \equiv \infty$ und $\frac{1}{\infty} \equiv 0$.

**3. (Cauchyprodukte und Potenzreihen)**

a) (i) Bestimmen Sie das Cauchyprodukt von $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n}$ (siehe Aufgabe 1).

(ii) Zeigen Sie damit, dass

$$\sum_{n \in M} \frac{1}{n} = \frac{5}{2},$$

wobei $M \equiv \{1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, \ldots\}$ die Menge aller natürlicher Zahlen ist, welche durch keine Primzahl $\neq 2, 5$ teilbar sind.

b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihen

(i) $P_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n$ für $\alpha > 0$.

(ii) $Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{3n}{n} x^n$

**4. (Natürlicher Logarithmus)**
Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften des natürlichen Logarithmus:

a) Der Bildbereich von ln ist $\mathbb{R}$.

b) ln ist bijektiv.

c) ln ist monoton wachsend.

d) $\ln(1) = 0$.

e) Für alle $x, y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ gilt $\ln(x) + \ln(y) = \ln(xy)$.

# Präsenzaufgaben

**5. (Konvergenzradius)**
Sei $a$ eine reelle Folge und sei $P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ die dazugehörige Potenzreihe mit Konvergenzradius $r$. Beweisen Sie, dass

$$r = \sup\{R \in \mathbb{R}_+ | P(R) \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \text{konvergiert}\}.$$

**6. (Binomialsatz)**
Zeigen Sie den Binomialsatz!