Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

7. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 10.12.15 in der Vorlesung

---

1. (Reihen)

Untersuchen Sie die Reihen mit den Reihengliedern

a) $a_n = \frac{2^{n+1}}{3^{n-2}}$,

b) $b_n = \left(-1\right)^{\frac{1}{2}n(n-1)} \frac{n^{100}}{2^n}$,

c) $c_n = \frac{1000^n}{n!}$,

d) $d_n = (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

auf Konvergenz bzw. Divergenz. Sind die Reihen absolut konvergent?
Bemerkung zu c): *Die Fakultät $n!$ ist für $n \in \mathbb{N}$ durch*

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

definiert. Formaler ausgedrückt definiert man $n!$ mit Hilfe der Nachfolgerabbildung ϕ wie folgt

$$0! \equiv 1, \quad \phi(n)! = (n!)\phi(n) \quad n \in \mathbb{N}$$

2. (Alternierende harmonische Reihe)

Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert die alternierende harmonische Reihe, d.h. der Limes $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{k} = s$ existiert.

a) Zeigen Sie, dass die folgende Reihe durch Umordnung dieser Reihe erhalten werden kann:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}\right) = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} \pm \cdots .$$

b) Zeigen Sie, dass diese Reihe gegen $3s/2$ konvergiert.

3. (Nicht absolut konvergente Reihen)

Gegeben sei eine beliebige konvergente, aber nicht absolut konvergente Reihe mit Reihengliedern a_n.

a) Zeigen Sie, dass sich die Reihe so umordnen lässt, dass die umgeordnete Reihe divergiert.

b) Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sich die Reihe so umordnen lässt, dass die umgeordnete Reihe gegen s konvergiert.

4. (Summierbarkeit)

a) Untersuchen Sie die Funktionen $a, b : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ auf Summierbarkeit, wobei für $(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$

   (i) $a_{(j,k)} = \frac{1}{1+(j^2+k^2)^2}$,

   (ii) $b_{(j,k)} = \frac{1}{1+(j^2-k^2)^2}$.

b) Sei $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine summierbare Funktion. Zeigen Sie, dass dann auch $a^2 : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ summierbar ist.

Präsenzaufgaben

5. (Reihen)

Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

a) Die Reihe $\sum_{n\geq 1}(x_{n+1} - x_n)$ konvergiert genau dann, wenn die Folge (x_n) konvergiert.

b) Falls $\sum_{n\geq 1} x_n$ konvergiert und $x_n \geq 0$ ist, so konvergiert auch $\sum_{n\geq 1} x_n^2$.

6. (Summierbarkeit)

Untersuche die Funktion $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $a_{(m,n)} = \frac{1}{2^m 3^n}$ auf Summierbarkeit.