Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

6. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 03.12.15 in der Vorlesung

---

1. (Häufungspunkte)

a) Zeigen Sie, dass beschränkte Folgen mit genau einem Häufungspunkt in $\mathbb{R}$ konvergent sind.

b) Finden Sie eine Folge mit genau einem Häufungspunkt in $\mathbb{R}$, die nicht konvergent ist.

c) Finden Sie eine Folge, die dass gesamte Intervall $[0, 1]$ als Häufungspunkt hat.

2. (Rekursive Folge)
Die Folge a mit Folgengliedern a_n für $n \in \mathbb{N}$ sei wie folgt rekursiv definiert:

$$a_{-1} := 0, \quad a_0 = 1, \quad a_n := \frac{1}{2}(a_{n-1} + a_{n-2}), \quad \text{für } n \geq 1.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge b mit Folgengliedern $b_n = a_n - a_{n-1}$ für $n \geq 1$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

b) Beweisen Sie, dass auch die Folge a konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

3. (Subadditivität)
Sei a eine Folge mit Folgengliedern a_n, $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaften

$$a_{n+m} \leq a_n + a_m \quad \forall n, m \in \mathbb{N}.$$

Sei b die Folge mit Folgengliedern $b_n = \frac{a_n}{n}$, $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Wenn $\inf\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$ existiert, dann existiert auch $\lim b$ und es gilt $\lim b = \inf\{b_n, n \in \mathbb{N}\}$,

4. (Reihen)
Es sei S die Reihe mit Reihengliedern $a_n, n \in \mathbb{N}$ und S sei konvergent, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{R}$. Weiter sei b eine beschränkte Folge.

a) Es sei $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Reihe mit Reihengliedern $a_n b_n, n \in \mathbb{N}$ konvergent ist.

b) Gilt die Aussage aus a), falls a_n auch negativ sein darf?

Präsenzaufgaben

5. ($\limsup$ und $\liminf$)

Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen reeller Zahlen mit

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \neq -\infty$$

und

$$\limsup_{n\to\infty} b_n \neq -\infty.$$

Zeigen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

Hierbei wird die Konvention benutzt, dass $a + \infty = \infty + a = \infty$ für alle $a \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

6. (Reihen und ihre Eigenschaften)

a) Sei $n_0 \in \mathbb{N}$. Es gelte

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq q > 1$$

für alle $n > n_0$. Zeigen Sie, dass dann die Folge S mit Folgengliedern $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ divergiert.

b) Seien die Folgen P mit Folgengliedern $\sum_{k=1}^n a_k^2$ und Q mit Folgengliedern $\sum_{k=1}^n b_k^2$ konvergent. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge S mit den Folgengliedern $\sum_{k=1}^n a_k b_k$ konvergiert.

c) Folgern Sie, dass die Konvergenz der Folge P mit Folgenglieder $\sum_{k=1}^n a_k^2$ impliziert, dass auch die Folge Q mit Folgengliedern $\sum_{k=1}^n \frac{a_k}{k}$ konvergiert.

7. (Reihen)

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz:

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{2n-1}$,

b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2n-1)^2}$,

c) $\sum_{n=1}^\infty (-1)^n \frac{n-1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{n}}$.