Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

5. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 26.11.15 in der Vorlesung

---

1. (Folgenkonvergenz)

Die Folge $b = (b_n)_{n\geq 1}$ konvergiere gegen ein $r \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann auch die Folge c, deren Folgenglieder durch

$$c_n = \frac{1}{n}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n)$$

definierte sind, gegen r konvergiert.

2. (Termumformungen)

Schreiben Sie die Terme als einen möglichst stark vereinfachten Bruch. Geben Sie alle Zwischenschritte an!

a) $\frac{2x-3y}{2x+3y} - \frac{2x+3y}{2x-3y} + \frac{8x^2+18y^2}{4x^2-9y^2}$

b) $\frac{a}{a-b} - \frac{b^2}{a^2+ab+b^2} - \frac{a^2b}{a^3-b^3}$

c) $\frac{m-3}{m+4} - \frac{m^2-9m-3}{m^2+m-12} + \frac{m-5}{m-3}$

d) $\frac{x^2+36y^2}{x-6y} - \frac{3x+18y}{x^2-36y^2} + \frac{12xy+6y-x-3}{6y-x} - 1$

e) $\frac{y}{ax-ay} + \frac{x}{ax+ay}$

3. (Mengen-Topologische Grundbegriffe)

a) Beweisen Sie die folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $M \subset \mathbb{R}$ ist $\mathrm{int}M$ offen.

(ii) Für jedes $M \subset \mathbb{R}$ ist $M \cup \partial M = \overline{M}$ abgeschlossen.

b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ gilt

(i) $|5x+3| - |3x-2| \geq 5$?

(ii) $\frac{1}{x+|x-1|} < 3$?

Bestimmen Sie jeweils (falls möglich) das Maximum und Minimum der Lösungsmenge. Bestimmen Sie das Innere und den Rand der Lösungsmenge. Beweisen Sie ihre Behauptungen anhand der Definiton!

4. (Quotienten)

Es sei $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge.

a) a sei eine konvergente Folge mit Grenzwert ungleich 0. Zeigen Sie, dass dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1.$$

Gilt auch die Umkehrung?

b) Sei $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zudem sei

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \quad \text{wobei } 0 < q < 1.$$

Zeigen Sie, dass dann a eine Nullfolge ist.

Präsenzaufgaben

5. (Folgen)

a) Zeigen Sie, dass für jede Folge $(a_n)_{n\geq 1}$ gilt

$$|a_n - a_m| \leq \sum_{k=m}^{n-1} |a_{k+1} - a_k| \qquad \text{für } n > m.$$

b) Es seien $C > 0$, $0 \leq q < 1$ und $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Folge reeller Zahlen mit

$$|a_{n+1} - a_n| \leq Cq^n.$$

Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ konvergiert.

6. (Konvergenz und Divergenz)

Seien $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Folgen. Nehmen Sie Stellung zu folgenden Aussagen:

a) Wenn a konvergiert und b divergiert, dann divergieren auch die Folgen $a+b$ und ab.

b) Wenn a und b divergieren, dann divergieren auch $a+b$ und ab.

c) Sei a eine Nullfolge, b eine beliebige Folge. Dann ist ab auch eine Nullfolge.

d) Aus $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 0$ folgt, dass mindestens a oder b eine Nullfolge ist.

e) Es gibt eine Folge a reeller Zahlen, sodass jede reelle Zahl der Limes einer geeigneten Teilfolge von a ist.

Beweisen Sie die richtigen Aussagen und widerlegen Sie die falschen Behauptungen durch Gegenbeispiele.

7. (Topologische Grundbegriffe)

a) Bestimmen Sie die $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|2x| - |6 - 2x| > 0$$

gilt. Bestimmen Sie Supremum, Infimum, Minimum und Maximum der Lösungsmenge (falls möglich). Bestimmen Sie außerdem das Innere und den Rand der Lösungsmenge. Versuchen Sie ihre Aussagen anhand der Definition zu beweisen!

b) Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleer und beschränkt. Zeigen Sie, dass dann

$$\sup A \cdot \sup B \leq \sup\{a \cdot b | a \in A, b \in B\}.$$

Geben Sie ein Beispiel an, bei dem Gleichheit gilt und eines bei dem $<$ gilt!

Die Fachschaft Mathematik feiert am 26.11 ihre Matheparty in der N8schicht. Der VVK findet am Mo. 23.11., Di. 24.11. und Mi. 25.11. vor der Mensa Poppelsdorf statt. Alle weiteren Infos auch auf fsmath.uni-bonn.de