Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

3. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 12.11.15 in der Vorlesung

---

1. (Unvollständigkeit der rationalen Zahlen)

Zeigen Sie, dass es keine rationale Zahl x gibt für die $x^3 = 3$ gilt. Gibt es eine geometrische Interpretation von x? Welche?

2. (Heron Verfahren)

Der Heron Algorithmus ist ein Verfahren, das zur Berechnung von Quadratwurzeln benutzt werden kann. Möchte man die positive Lösung von $x^2 = a$ für $a \in \mathbb{Q}_+$ bestimmen, so kann man iterativ vorgehen. Sei $x_1 \in \mathbb{Q}_+$ beliebig. Wir setzen dann

$$x_{n+1} = \frac{x_n + \frac{a}{x_n}}{2}.$$

a) Zeigen Sie, dass die Folge $(x_n, n \in \mathbb{N})$ eine Cauchy-Folge ist und dass die Folge $(x_n^2, n \in \mathbb{N})$ gegen a konvergiert.

b) Führen Sie das Verfahren für den Fall $a = 3$ durch, wählen Sie als Startwert $x_1 = 1$ und bestimmen Sie x_6.

c) Finden Sie eine graphische Erklärung für das Heronverfahren mit Startwert $x_1 = 1$.

d) Was passiert wenn man mit negativen Startwerten beginnt?

3. (Maxima)

a) Seien $a, b \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}\left(a + b + |a - b|\right)$$

und

$$\min\{a, b\} = \frac{1}{2}\left(a + b - |a - b|\right)$$

b) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolgen. Zeigen Sie, dass dann auch $c = (c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $c_n = \max\{a_n, b_n\}$ eine Cauchyfolge ist.

4. (Folgen)
Entscheiden Sie, ob die Folgen konvergent sind. Beweisen Sie ihre Aussage mit Hilfe der Definition und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

a) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_n = \frac{(n+1)^2 - n^2}{n}$.

b) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $b_n = \frac{1+2^2+\cdots+n^2}{n^3}$.

c) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_{2n} = 1 + \frac{100}{(2n)^2}$ und $c_{2n+1} = -\left(1 + \frac{100}{(2n+1)^2}\right)$.

Präsenzaufgaben

Hinweis: Diese Aufgaben werden während der Tutorien in der vierten Vorlesungswoche bearbeitet und dort auch besprochen. Sie werden nicht abgegeben!

5. (Betrag)
Zeigen Sie, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Q}$ die folgenden Ungleichungen gelten.

a) (*Dreiecksungleichung*)$|x - y| \leq |x - z| + |y - z|$.

b) $|x - y| \geq ||x| - |y||$.

6. (Umformungen)
Schreiben Sie die Terme als einen möglichst stark vereinfachten Bruch.

a) $\frac{(3x-2)^2}{4-9x^2} + \frac{27x^2-12}{27x^2-36x+12}$.

b) $\frac{5r+20}{2r^2+8r} - \frac{3r-6}{r^2-4} - \frac{4r-16}{r^2-4r} + \frac{r}{2r^2+4r}$.

c) $\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2} - \frac{a^3+a^2b+ab^2+b^3}{a^2+2ab+b^2} - a$.

7. (Betrag)

a) Zeigen Sie, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$\left|\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right| \geq 2.$$

b) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$\frac{x+4}{4x-12} > 2.$$

c) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$x - |2x + 4| > 1 - |x - 2|.$$