Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

13. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 04.02.16 in der Vorlesung

---

1. (Nullfunktion)
Es sei $f : [0; 1] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(0; 1)$ differenzierbar sowie $f(0) = 0$. Es gebe ein $C > 0$ mit

$$0 \leq f'(x) \leq Cf(x) \quad \text{für } 0 < x < 1.$$

Beweisen Sie, dass f konstant gleich 0 ist.

2. (Ungleichungen)
Für eine integrierbare Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und eine reelle Zahl $p \geq 1$ definiert man

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p}.$$

Zeigen Sie, dass für integrierbare Funktionen $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ folgende Minkowski- und Hölder-Ungleichungen gelten:

i) $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p, \quad$ für alle $p \geq 1$.

ii) $\displaystyle\int_a^b |f(x)\, g(x)| \, dx \leq \|f\|_p \, \|g\|_q, \quad$ für alle $p, q > 1$ mit $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

3. (Anfangswertprobleme)
Man löse folgende Anfangswertprobleme.

a) $x'(t) = \sin(t)x(t), \quad x(0) = 0.$

b) $x'(t) = \frac{x^2(t)}{t}, \quad x(e) = -\frac{1}{2}$

c) $x'(t) = \sin(t)x(t) + \cos(t)e^{-cos(t)}, \quad x(0) = \frac{1}{e}.$

4. (Anfangswertproblem)
Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems

$$x'(t) = \frac{x(t)\log(x(t))}{t\log(t)}, \quad x(2) = 4.$$

Präsenzaufgaben

5. (tan und arctan)

Wir definieren $\tan : (-\pi/2, \pi/2) \to \mathbb{R}$ durch

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}, \quad x \in (-\pi/2, \pi/2)$$

Die Umkehrfunktion bezeichnen wir mit arctan.

a) Bestimmen Sie die Ableitungen von tan und arctan.

b) Berechnen Sie

$$\int_0^{\pi/4} \tan^2(x) dx.$$

a) Bestimmen Sie die Stammfunktion von

$$g(x) = \frac{\cos(x)\sin^2(x)}{1 + \sin^2(x)}.$$

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg bei der Klausur!