Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

universitätbonn

12. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 28.01.16 in der Vorlesung

---

1. (Varianten des Mittelwertsatzes)

Es seien $a < b$, $f \in C^0([a;b])$ und $g \in C^1([a;b])$ monoton wachsend sowie $p : [a;b] \to [0,\infty)$ integrierbar. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Es existiert ein $\xi \in [a;b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)p(x)dx = f(\xi)\int_a^b p(x)dx.$$

b) Es existiert ein $\xi \in [a;b]$, so dass

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^\xi f(x)dx + g(b)\int_\xi^b f(x)dx.$$

2. (Stammfunktionen)

Bestimmen Sie die Stammfunktion folgender Funktionen über geeigneten Intervallen. Geben Sie diese Intervalle an und geben Sie an den entsprechenden Stellen die verwendeten Gesetze an.

a) $\frac{1}{x\ln(x)}$

b) $(\ln(x))^2$

c) $\exp(\alpha x)\sin(x)$

d) $x^2\cos(x)$

e) $\frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

3. (Integrierbarkeit)

Man untersuche die folgenden Funktionen auf Integrierbarkeit. (Für $x \in \mathbb{R}$ setzen wir $[x] = \max(n \in \mathbb{Z} : n \leq x)$).

a) $f : [0;2] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = [x]$;

b) $g : [1;3] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{[x]}$;

c) $h : [-1;1] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = \begin{cases} \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Im Falle von Integrierbarkeit berechnen man mittels der Definition $\int_0^2 f(x)dx$ und $\int_1^3 g(x)dx$.

4. (Riemann Summen)

Beweisen Sie die folgende Aussage:
Eine Funktion $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemannn integrierbar, wenn für jede Folge von Partitionen $I^{(n)}, n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft, dass $\lim_{n\uparrow\infty} \max_{k=1}^{n} |I_k^{(n)}| = 0$, und jede Wahl der $\xi_1^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, die Folgen $R_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ zu dem gleichen Grenzwert konvergieren. Diese ist dann das Riemann Integral von f.

Präsenzaufgaben

5. (Integrale)

Berechnen Sie folgende Integrale:

a) $\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx \quad a < b$,

b) $\int_0^1 x\sqrt{1+x^2}\,dx$

6. (Eine erste Differentialgleichung)

Betrachten Sie die Differenzialgleichung $x'(t) = tx(t)$.

a) Um welchen Typ von Differenzialgleichung handelt es sich? (linear/nicht linear, homogen/nicht homogen)

b) Bestimmen Sie alle Lösungen dieser Differenzialgleichung.

c) Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$x'(t) = tx(t), \quad x(1) = 2.$$