Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

11. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 21.01.16 in der Vorlesung

---

1. (L'Hospitalsche Regel)

a) Seien $f, g : (a; b) \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen, und es sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a; b)$. Beweisen Sie, dass in jeder der folgenden Situationen

(i) $\lim_{x\downarrow a} f(x) = 0$ und $\lim_{x\downarrow a} g(x) = 0$

(ii) $\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$ und $\lim_{x\downarrow a} g(x) = \infty$ (uneigentliche Konvergenz)

gilt:

Existiert $\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch $\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es ist

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

Hinweis: Entsprechendes gilt für $x \uparrow b$, $x \to \infty$ und $x \to -\infty$.

b) Verwenden Sie (falls möglich) die Aussage aus Aufgabenteil a) um die folgenden Grenzwerte zu bestimmen.

(i) $\lim_{x\to 0} x \ln x$,

(ii) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}$.

2. (Taylorpolynome)

a) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f' = f$. Beweisen Sie, dass $f(x) = f(0)\exp(x)$ gilt.

b) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\mathcal{E} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}), & \text{falls } x \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

unendlich oft differenzierbar ist und dass $\frac{d^k\mathcal{E}}{dx^k}(0) = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom n-ten Grades. Was fällt ihnen auf?

3. (Konvexe Funktion)
Beweisen Sie, dass jede in einem offenen Intervall $D \subset \mathbb{R}$ konvexe Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ stetig ist.
Hinweis: Betrachten sie zunächst $\frac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

4. (Konvexität und Ungleichungen)

a) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$, $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ mit

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$$

folgende Ungleichung gilt.

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i}.$$

b) Zeigen Sie, dass für $a, b, c > 0$ gilt

$$\frac{a}{a+3b+3c} + \frac{b}{3a+b+3c} + \frac{c}{3a+3b+c} \geq \frac{3}{7}.$$

Präsenzaufgaben

5. (Verallgemeinerter Mittelwertsatz)
Seien $f, g : [a; b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $(a; b)$ differenzierbar. Ferner sei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a; b)$.

(i) Zeigen Sie, dass $g(b) \neq g(a)$ gilt.

(ii) Zeigen Sie, dass es ein $\xi \in (a; b)$ mit

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

Hinweis: Versuchen Sie eine geeignete Hilfsfunktion zu basteln.

(iii) Was unterscheidet die Aussage in (ii) vom Mittelwertsatz aus der Vorlesung?

6. (Konvexität)

(i) Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x \ln x$ eine konvexe Funktion ist.

(ii) Beweisen Sie, dass für alle $a, b, c > 0$

$$a^a b^b c^c \geq \left(\frac{a+b+c}{3}\right)^{a+b+c}.$$

7. (Normen)
Beweisen Sie, dass die p-Normen Normen auf dem Raum $\mathbb{R}^n$ sind.