Institut für angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

10. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 14.01.16 in der Vorlesung

---

1. (Ableitungen bestimmen)
Finden Sie die Ableitungen folgender Funktionen und geben Sie die verwendeten Ableitungsregeln an-

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{(2-x^2)(3-x^3)}{(1-x^2)}$;

b) $f : (-1, \infty) \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt[3]{\frac{1-x^3}{1-x^4}}$;

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$;

d) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^{a^x}$, mit einem reellen $a > 0$;

e) $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^{x^x}$, mit einem reellen $a > 0$.

Hinweis: Ausdrücke der Form a^{b^c} sind stets als $a^{(b^c)}$ zu interpretieren.

2. (Sinus und Cosinus)

a) Beweisen Sie die folgende Aussage. Für $x \in (0; 2]$ gilt

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

und

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x.$$

b) Folgern Sie, dass $\sin x$ für $x \in (0; 2]$ positiv ist.

c) Beweisen Sie, dass der Kosinus in $(0; 2]$ eine Nullstelle hat. Berechnen Sie den Wert des Sinus an dieser Stelle.

3. (Nullstellen)
Beweisen Sie, dass die Funktion $p_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$p_n(x) = \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right], \quad n \in \mathbb{N}$$

im Intervall $(-1, 1)$ genau n paarweise verschiedene Nullstellen hat.

4. (Differenzierbarkeit)
Sei $s : \mathbb{R} \to [-1;1]$ stetig, surjektiv und periodisch mit Periode 1, also $s(x+1) = s(x)$ für alle x. Zudem sei s beliebig oft stetig differenzierbar.

a) Untersuchen Sie die Funktion $f_0 : (0,1) \to \mathbb{R} : f(x) = s(\frac{1}{x})$ auf gleichmäßige Stetigkeit.

b) Untersuchen Sie die Funktion

$$f_1 : [0,1] \to \mathbb{R} : f_1(x) = \begin{cases} xs(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit.

c) Untersuchen Sie die Funktion

$$f_2 : [0,1] \to \mathbb{R} : f_2(x) = \begin{cases} x^2 s(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

auf Differenzierbarkeit.

d) Untersuchen Sie die Ableitungen von f_1 und f_2, sofern sie existieren, auf Stetigkeit.

Präsenzaufgaben

5. (Differenzierbare Funktionen)
Beweisen Sie: Ist $f : (a;b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt

a) Falls $f' > 0$ in $(a;b)$, so wächst f in $(a;b)$ streng monoton.

b) $f' \geq 0$ in $(a;b)$ genau dann wenn f in $(a;b)$ monoton wächst.