Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemster 2015/16
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

1. Übungsblatt
„Analysis I"

Abgabe bis Donnerstag 29.10.15 in der Vorlesungspause

Hinweis: Achten Sie stets darauf einen detaillierten Beweis (ähnlich zum Beweis von Lemma 1.5) zu führen!

1. (Schnitt, Differenz und symmetrische Differenz)

Seien A und B zwei Mengen. Zeigen Sie, dass die im Skript in Definition 1.4 definierten Mengen $C = A \cap B$ und $D = A \triangle B$ eindeutig festgelegt sind. Weisen Sie für den Fall, dass $B \subseteq A$ nach, dass $E = A \setminus B$ eindeutig bestimmt ist.

2. (Funktionen)

Seien $f : A \to B$, $g : B \to C$ Abbildungen. Zudem sei $h : A \to C$ die Verknüpfung von f und g, d.h. $h = g \circ f$. Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen gelten. Geben Sie Beweise oder Gegenbeispiele an.

a) Wenn h injektiv ist, müssen f und g injektiv sein.

b) Wenn g surjektiv ist, so ist auch h surjektiv.

c) Wenn h surjektiv ist, ist auch g surjektiv.

d) Wenn h injektiv ist, ist auch f injektiv.

e) Sei h bijektiv. Was können Sie dann über f und g aussagen?

3. (Äquivalenzrelationen)

Gegeben ist die Menge $A = \{1, 2, 3\}$. Finden Sie alle möglichen Äquivalenzrelationen auf A und geben Sie jeweils die Äquivalenzklassen an. Begründen Sie jeweils ihre Ergebnisse!

4. (Boolsche Algebra)

Seien A, B und C Mengen. Des weiteren sie X eine Menge, die A, B und C als Teilmengen enthält. Zeigen Sie, dass die folgenden Gesetze gelten:

a) *(Minimales Element)* Es gilt $A \cup \emptyset = A$ und $A \cap \emptyset = \emptyset$.

b) *(Maximales Element)* Es gilt $A \cup X = X$ und $A \cap X = A$.

c) *(Identität)* $A \cup A = A$ und $A \cap A = A$.

d) *(Kommutativgesetz)* Es gilt $A \cup B = B \cup A$ und $A \cap B = B \cap A$.

e) *(Assoziativgesetz)* Es gilt $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ und $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

f) *(Partition)* Es gilt $A \cup (X \setminus A) = X$ und $A \cap (X \setminus A) = \emptyset$.

g) *(De Morgansche Gesetze)* Es gilt $X \setminus (A \cup B) = (X \setminus A) \cap (X \setminus B)$ und $X \setminus (A \cap B) = (X \setminus A) \cup (X \setminus B)$.

Präsenzaufgaben

Hinweis: Diese Aufgaben werden während der Tutorien in der zweiten Vorlesungswoche bearbeitet und dort auch besprochen. Sie werden nicht abgegeben!

5. (Äquivalenzrelationen)
Sei $f : A \to A$ eine Funktion und

$$R = \{(a, b) | a, b \in A; f(a) = f(b)\}$$

eine Relation. Gibt es eine Funktion f, so dass R keine Äquivalenzrelation ist?
Beweise deine Aussage!

6. (Funktionen)
Sei A eine *endliche* Menge und $f : A \to A$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) f ist injektiv.

(ii) f ist surjektiv.

7. (Peanoaxiome)
In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit den Implikationen von Definition 1.12 aus dem Skript.

a) Schauen Sie sich die Beispiele 1.13 und 1.14 im Skript an.

   (i) Überlegen Sie sich, dass (iia) bzw. (iib) nicht erfült sind.

   (ii) Weisen Sie nach, dass die Beispiele 1.14 und 1.15 aus dem Skript, die anderen Peano Axiome erfüllen.

   (iii) Zeigen Sie, dass in Bespiel 1.15 gilt $4 = 1$ gilt.

   (iv) Ist in den Bespielen 1.14 und 1.15 eine vollständige Induktion möglich?

b) Sei M eine Menge die (i)-(ii) erfüllt. Zudem enthalte M eine Menge $N \neq M$, die (i)-(iii) erfüllt. Warum kann man mittels vollständiger Induktion keine Aussage für alle $m \in M$ zeigen?

c) Beweisen Sie für die natürlichen Zahlen, dass $4 \neq 1$ ist.

8. (Vollständige Induktion)

Beweisen Sie mit Hilfe von vollständiger Induktion, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$