

Probeklausur „, Stochastik für Lehramt“

Besprechung in der letzten Vorlesung

1. (Party)

[3+3+4 Pkt]

Bei einer Party wird der Eintrittspreis gewürfelt. Der Gast zahlt die obenliegende Augenzahl in Euro als Eintrittspreis.

- Zum Würfeln wird ein normaler Würfel verwendet. Beschreiben Sie dieses Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum.
- Nun haben Sie die Wahl mit einem normalen Würfel zu würfeln oder 3 Euro zu bezahlen. Berechnen Sie den zu erwartenden Eintrittspreis, falls Sie würfeln. Sind 3 Euro ein fairer Eintrittspreis?
- Nun wird ein siebenseitiger Würfel verwendet auf dem die Augenzahlen aus der 1 und den ersten sechs Primzahlen bestehen. Beschreiben Sie dieses Modell ebenfalls durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum. Wie hoch ist, wenn Sie nun würfeln, der zu erwartende Eintrittspreis?

2. (Bedingte Wahrscheinlichkeiten)

[4+6 Pkt]

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, wobei Ω eine endliche Menge ist.

- Es seien $A, B \in \mathcal{F}$ zwei Ereignisse. Definieren Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B .
- Beweisen Sie die folgende Aussage: Seien $B_1, \dots, B_N \in \mathcal{F}$, paarweise disjunkte Mengen, so dass (i) $\cup_{n=1}^N B_n = \Omega$ und (ii) $\mathbb{P}(B_n) > 0$, für alle n .

Dann gilt für alle $A \in \mathcal{F}$, dass

$$\sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A|B_n)\mathbb{P}(B_n) = \mathbb{P}(A).$$

3. (Markovkette)

[2+4+4 Pkt]

Eine Markovkette werde durch folgende Übergangsmatrix beschrieben

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Geben Sie den zur Markovkette gehörigen Graphen an.
- b) Zeigen Sie, dass die Markovkette mehr als eine invariante Verteilung hat und bestimmen Sie alle invarianten Verteilungen.
- c) Zeigen Sie, dass $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$ existiert und bestimmen Sie die Grenzmatrix.

4. (Moivre-Laplace)

[4+6 Pkt]

- a) Formulieren Sie den Satz von Moivre-Laplace.
- b) Eine faire Münze, wird n mal geworfen. Zeigen, Sie dass für große n die Anzahl der Würfe, bei denen die Münze Kopf zeigt, approximativ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ im Intervall $[\frac{1}{2}n - 0.335\sqrt{n}, \frac{1}{2}n + 0.335\sqrt{n}]$ liegt.

5. (Schätzen)

[3+4+3 Pkt]

Eine Urne enthält viele weiße und schwarze Kugeln. Wir möchten gerne den prozentualen Anteil an weißen Kugeln schätzen. Dazu wird n -mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen.

- a) Geben Sie einen konsistenten Schätzer für den Anteil der weißen Kugeln an.
- b) Nun ziehen Sie 100 Kugeln und von denen sind 27 weiß. Bestimmen Sie ein 95% Konfidenzintervall für den Anteil der weißen Kugeln mit Hilfe der Tchebychev-Ungleichung.
- c) Wie ändert sich das obige Intervall, wenn Sie 1000 Kugeln ziehen und 270 weiß sind?

6. (Anpassungstest)

[3+5+2 Pkt]

Es wird vermutet, dass bei Pferderennen auf einem ovalen Parcours die Startposition einen Einfluß auf die Gewinnchancen hat. In 144 Rennen hatten die Sieger die Startpositionen 1, 2, ..., 8 mit den folgenden Häufigkeiten: 31, 19, 18, 33, 17, 2, 15, 9. Testen Sie die Hypothese, dass die Startposition keinen Einfluß auf die Siegerchancen hat, zum Niveau $\alpha = 5\%$.

- a) Formulieren Sie das Testproblem.
- b) Geben Sie die Teststatistik und deren Verteilung an. Bestimmen Sie den Annahmehereich des Tests.
- c) Wie wird bei den oben genannten Häufigkeiten entschieden?

Tabelle der Quantile der Chiquadrat-Verteilung

α -Quantile $\chi_{n;\alpha}^2$ der Chiquadrat-Verteilungen χ_n^2 mit n Freiheitsgraden. $\chi_{n;\alpha}^2$ ist der Wert $c > 0$ mit $\chi_n^2([0, c]) = \alpha$.

Notation: $^{-5}3.9 \equiv 3.9 \cdot 10^{-5}$.

$\alpha =$	0.005	0.01	0.02	0.05	0.1	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995
$n = 1$	$^{-5}3.9$	$^{-4}1.6$	$^{-4}6.3$	$^{-3}3.9$	0.0158	2.706	3.842	5.412	6.635	7.879
2	0.0100	0.0201	0.0404	0.1026	0.2107	4.605	5.991	7.824	9.210	10.60
3	0.0717	0.1148	0.1848	0.3518	0.5844	6.251	7.815	9.837	11.34	12.84
4	0.2070	0.2971	0.4294	0.7107	1.064	7.779	9.488	11.67	13.28	14.86
5	0.4117	0.5543	0.7519	1.145	1.610	9.236	11.07	13.39	15.09	16.75
6	0.6757	0.8721	1.134	1.635	2.204	10.65	12.59	15.03	16.81	18.55
7	0.9893	1.239	1.564	2.167	2.833	12.02	14.07	16.62	18.48	20.28
8	1.344	1.646	2.032	2.733	3.490	13.36	15.51	18.17	20.09	21.95
9	1.735	2.088	2.532	3.325	4.168	14.68	16.92	19.68	21.67	23.59
10	2.156	2.558	3.059	3.940	4.865	15.99	18.31	21.16	23.21	25.19
11	2.603	3.053	3.609	4.575	5.578	17.28	19.68	22.62	24.72	26.76
12	3.074	3.571	4.178	5.226	6.304	18.55	21.03	24.05	26.22	28.30
13	3.565	4.107	4.765	5.892	7.042	19.81	22.36	25.47	27.69	29.82
14	4.075	4.660	5.368	6.571	7.790	21.06	23.68	26.87	29.14	31.32
15	4.601	5.229	5.985	7.261	8.547	22.31	25.00	28.26	30.58	32.80
16	5.142	5.812	6.614	7.962	9.312	23.54	26.30	29.63	32.00	34.27
17	5.697	6.408	7.255	8.672	10.09	24.77	27.59	31.00	33.41	35.72
18	6.265	7.015	7.906	9.390	10.86	25.99	28.87	32.35	34.81	37.16
19	6.844	7.633	8.567	10.12	11.65	27.20	30.14	33.69	36.19	38.58
20	7.434	8.260	9.237	10.85	12.44	28.41	31.41	35.02	37.57	40.00
21	8.034	8.897	9.915	11.59	13.24	29.62	32.67	36.34	38.93	41.40
22	8.643	9.542	10.60	12.34	14.04	30.81	33.92	37.66	40.29	42.80
23	9.260	10.20	11.29	13.09	14.85	32.01	35.17	38.97	41.64	44.18
24	9.886	10.86	11.99	13.85	15.66	33.20	36.42	40.27	42.98	45.56
25	10.52	11.52	12.70	14.61	16.47	34.38	37.65	41.57	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.41	15.38	17.29	35.56	38.89	42.86	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.13	16.15	18.11	36.74	40.11	44.14	46.96	49.64
28	12.46	13.56	14.85	16.93	18.94	37.92	41.34	45.42	48.28	50.99
29	13.12	14.26	15.57	17.71	19.77	39.09	42.56	46.69	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.31	18.49	20.60	40.26	43.77	47.96	50.89	53.67
35	17.19	18.51	20.03	22.47	24.80	46.06	49.80	54.24	57.34	60.27
40	20.71	22.16	23.84	26.51	29.05	51.81	55.76	60.44	63.69	66.77
50	27.99	29.71	31.66	34.76	37.69	63.17	67.50	72.61	76.15	79.49
75	47.21	49.48	52.04	56.05	59.79	91.06	96.22	102.2	106.4	110.3
100	67.33	70.06	73.14	77.93	82.36	118.5	124.3	131.1	135.8	140.2

Tabelle der Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung

Beispiel: Der Eintrag in Zeile 1.1 und Spalte 0.02 ist $\Phi(1.12)$.

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000