Lernhilfe zum stochastischen Teil von ALMA 2

Boris Prochnau: Gruppe 5

29. Mai 2015

Allgemeiner Hinweis

Wie ich schon zu Beginn des Semesters erwähnt habe erlernen viele im ersten Jahr das richtige 'Lernen'. Dabei sind fast immer Lernstrategien von Nutzen. Um einen höheren Grad der Verarbeitung von Informationen zu erreichen (sog. Elaboration) empfehle ich die Vorlesungsinhalte in Form von Fragen zu reflektieren. Dabei genießt man auch die Freiheit individuelle Fragen zu individuellen Schwächen zu formulieren und damit auch selber die Antworten dafür zusammen zu fassen. Zufällig passen kluge Fragen fast immer auf eine kleine Karteikarte. Und fast immer passt auch die Antwort auf die Rückseite.
Zusammen mit dem bekannten Karteikastensystem (siehe Abb. 1) ist z.B. eine gute Lernstrategie geschaffen worden bei dem bereits gelernter Stoff nicht wieder aus dem Gedächtnis purzelt und gleichzeitig viel Konzentration auf unbekannte Inhalte fokussiert werden kann.

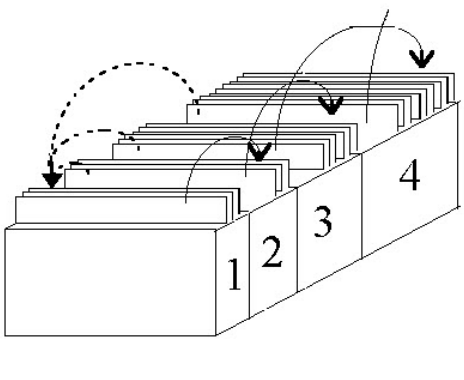

Abbildung 1: Beispielhaftes Karteikartensystem

Sätze und Definitionen? Fehlt da nicht was?

Darüber hinaus besteht die Mathematik nicht nur aus dem Wissen über Sätze und Definitionen. Natürlich ist es super wenn man beide sehr gut kann. Aber genauso wichtig ist es die Techniken und Herangehensweisen zu kennen mit denen Sätze bewiesen und Definitionen motiviert werden. Deswegen gehören nützliche Übungsaufgaben und Beweise genauso auf 'Kärtchen' wie die Sätze und Definitionen. Insbesondere bemerkt man dann auch dass die Beweise sich garnicht mehr so sehr voneinander unterscheiden. Z.B. verrät einem das Problem oft welche Beweistechnik gefragt ist und man erkennt beinahe sofort ob etwas schon 'per Definition' gefolgert werden kann. Das Beweisen an sich fällt schließlich im allgemeinen viel leichter und man geht selbstbewusster ans Beweisen.
Deswegen lohnt es sich Beweise genauso hoch zu priorisieren wie Definitionen.
Die folgenden beiden Kapitel (insb. das 2.) sind nach belieben weiter zu individualisieren. Schreibt z.B. allgemeine Fragen die euch beim Bearbeiten von Übungszetteln begegnen kurz auf eine Karteikarte nieder und ergänzt die Antwort sobald sie gefunden ist auf die Rückseite. Auf diese Weise profitiert ihr später bei der Klausurvorbereitung von euren eigenen Erfahrungen.
Bei Fragen könnt ihr euch wie immer an mich wenden.

1 Nützliche Fragen:

Dieses Kapitel enthält eine Liste mit Fragen die das Wissen und Verständnis für viele Definitionen und Herangehensweisen an Aufgaben aus der Vorlesung abfragt.
Nicht alle Fragen in der folgenden Liste wurden in der Vorlesung ausführlich behandelt (meist habe ich bei diesen Fragen darauf hingewiesen). Auch wenn einige in der Vorlesung nur sehr knapp behandelt wurden, ist jedoch der allergrößte Teil davon als Basiswissen zu behandeln. Diese Fragen dienen der Selbstkontrolle und ersetzten keine Prüfungsvorbereitung. Jedoch bildet eine fortgeschrittene Elaboration und Reflexion der angesprochenen Themen eine gute Abdeckung der Vorlesungsinhalte.
Zu den meisten Fragen habe ich Hinweise/Lösungen in Form von Screenshots im Ordner 'Hilfe zu den Fragen' bereit gestellt. Einige Lösungen finden sich in der Mitschrift aus meinem Tutorium.
Viel Erfolg!

1. Was ist ein endlicher Messraum?
2. Was ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß (auch Wahrscheinlichkeitsverteilung oder Verteilung)?
3. Was ist eine Gleichverteilung?

4. Was ist eine Empirische Verteilung?
5. Was ist ein erzeugte Algebra? Was ist ein Erzeuger/Generator?
6. Was ist eine eindeutige minimale Partition von Ω.
7. Auf welche Arten kannst du den Erwartungswert definieren? Was sagt er aus? (Bonus: Was hat er mit dem Flächeninhalt einer Wkt-Verteilung zu tun?)
8. Wann ist eine Funktion messbar? Wie ist das anschaulich zu verstehen?
9. Was ist eine Zufallsvariable? Was ist der Ergebnisraum/Ω einer Zufallsvariablen? Ist Ω immer bekannt?
10. Wie ist eine Verteilungsfunktion definiert? Was hat man unter ihr zu verstehen?
11. Ist die Verteilungsfunktion bzgl. einem Wkt-Maß eindeutig? Und umgekehrt?
12. Was ist die Varianz einer Zufallsvariable? Was sagt sie aus?
13. Was bedeutet die Notation $\mathbb{P}(X = 3)$?
14. Was unterscheidet eine Sigma Algebra von einer Algebra? Wann braucht man z.B. eine sigma Algebra wenn eine Algebra nicht ausreicht?
15. Definiere:
    - Bernoulli Verteilung - Ber(p).
    - Binomialverteilung - Bin(n,p).
    - Poissonverteilung - Poi(p). Wann benutzt man sie?
    - Geometrische Verteilung - Geo(q)
    - Gleichverteilung - U_I
    - Gaußverteilung (aber dazu wurde wenig gemacht, jedoch sehr wichtig für alle folgenden W-Theorie Vorlesungen).
    - Exponentialverteilung (dazu wurde auch weniger gemacht, jedoch auch sehr wichtig für alle folgenden W-Theorie Vorlesungen).
16. Wann sind zwei Ereignisse Unabhängig? Kennst du ein Beispiel? Gibt es alternative Definitionen?
17. Wann sind Zufallsvariablen unabhängig? Kannst du ein Beispiel für abhängige Zufallsvariablen nennen? Was hat das mit Korrelation zu tun?

18. Was ist eine Produkt-σ-Algebra? Und wie ist das Produkt Maß definiert?

19. Was versteht man unter einem Stochastischen Prozess? Kannst du ein konkretes Beispiel nennen?

20. (wurde nicht viel behandelt) Wie prüft man ob etwas 'in Wahrscheinlichkeit konvergiert'?

21. Wie ist eine Markovkette mit endlichem Zustandsraum definiert?

22. Was ist eine stochastische Matrix bzw. eine Übergangsmatrix?

23. Was ist mit zeitlich homogenen Markovketten bzw. mit stationären Übergangswahrscheinlichkeiten gemeint?

24. Nenne zwei Eigenschaften einer Übergangsmatrix.

25. Was ist mit einer Invarianten Verteilung gemeint? Wie ist sie definiert? Was hat sie mit Eigenvektoren zu tun? Welcher Eigenwert ist damit immer gemeint? $\rightarrow$ Lemma 4.6.

26. Nenne eine MK mit mehreren invarianten Verteilungen.

27. Was bedeutet es wenn eine MK irreduzibel ist? Wann ist eine Markovkette irreduzibel? (Lemma 4.11)

28. Wie ist die erste Eintrittszeit in eine Untermenge definiert? Was versteht man unter $\{\tau_D = n\}$ für $D \subset S$?

2 Nützliche Sätze, Beispiele und Übungen:

Nützliche Lemmas und Korollare werden hier auch als Sätze angeführt.
Allgemeiner Hinweis: Besorgt euch Kopien von früheren Alma2 Klausuren von der Fachschaft. Die haben eine Sammlung von alten Klausuren für Studenten!
Zu den meisten Fragen habe ich Hinweise/Lösungen in Form von Screenshots im Ordner 'Hilfe zu den Fragen' bereit gestellt. Einige Lösungen finden sich in der Mitschrift aus meinem Tutorium. Leider hatte ich keine Zeit mehr aus diesen Stichpunkten Fragen zu formulieren. Das sei bei Bedarf euch überlassen.
Viel Erfolg!

1. Satz: Vollständige bzw Eindeutige Parametrisierung von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

2. Beispiel 1: Übergang von Gleichverteilung zu Kombinatorik.

3. Uebung: Beweis zum Lemma 1.8.
4. Uebung: Beweis der Existenz einer eindeutigen minimalen Partition von Ω.
5. Satz und Übung: Proposition 1.12 mit Beweis. Also Zusammenhang zwischen $\mathbb{P}$ und Partitionen von Ω. (Der Beweis wurde in den Übungsblättern besprochen)
6. Satz und Übung: (im Skript nur im Text versteckt, also nicht als Satz beschrieben) $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A] = \mathbb{P}(A)$
7. Satz und Übung: (Korollar 2.5) Linearität des Erwartungswertes.
8. Zufallsvariablen als Abbildung zwischen Wahrscheinlichkeitsmaßen.
9. Übung: Die Übungsaufgabe mit zum Zeichnen der Verteilungsfunktionen.
10. Satz: (Korollar 2.12 und 2.13) Chebychev und Markov Ungleichung.
11. Satz: (2.15) Eindeutige Zuordnung von Verteilungsfunktionen und Wahrscheinlichkeitsmaßen.
12. Übung: Zusammenhang zwischen Poisson und Binomialverteilung.
13. Übung: Satz 3.2 (ii) Beweis.
14. Satz: Bayes'sche Formel.
15. Übung: Nenne eine Beispiel für unabhängige Zufallsvariablen. Kennst du auch ein Beispiel von Abhängigen Zufallsvariablen? (siehe korrelierte Variablen).
16. Satz: Chapmann Kolmogorov Gleichung (habe ich nicht in der VL gefunden, ist aber bestimmt enthalten).
17. Übung: Übung zu Produktmaßen - Beweise Lemma 3.13.
18. Beispiel: 3.5.1 Die Irrfahrt.
19. Satz: Schwaches Gesetz der Großen Zahlen.
20. Beispiel: 4.8 (Wettermodell).
21. Satz: (4.7) Es existiert stets mindestens eine invariante Verteilung für stationäre Markovketten mit endlichem Zustandsraum.
22. Satz: (Lemma 4.12) eine irreduzible Markovkette mit endlichem Zustandsraum S hat genau eine invariante Verteilung.