Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

9. Übungsblatt
„ Stochastik für Lehramt”

Abgabe bis Mittwoch 24.06.15 in der Vorlesungspause

---

1. (Schweinerei; 6 Punkte)

Beim Würfelspiel “Schweinerei” wird mit Schweinen gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung ist wie in Abbildung 1 beschrieben.

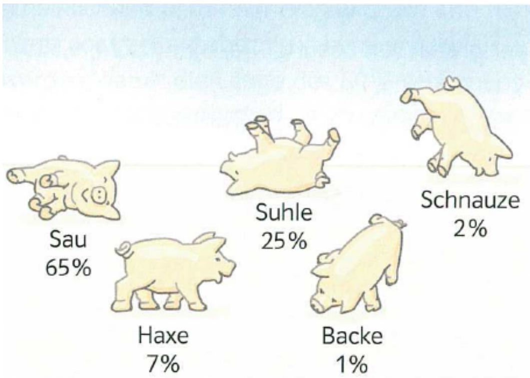

Abbildung 1: Auszug aus dem Lambacher Schweizer

a) Bei 1000 Würfen in der 7c erhielten die Mädchen 241-mal die “Suhle”.

   Thea: “Ich schätze jetzt natürlich die Wahrscheinlichkeit für Suhle auf 24, 1%. Warum sollte ich auf 25% runden wie in der Abbildung?”

   Ulla: “Aber dann wären ja Wahrscheinlichkeiten und relative Häufigkeiten immer das Gleiche.”

   Was würden Sie den Mädchen aus der 7c antworten?

b) Bestimmen Sie für jeden Möglichen Ausgang, wie oft Sie würfeln müssten, um die Wahrscheinlichkeiten in der Abbildung 1 mit einer Genauigkeit von 1% zu schätzen.

   Alternativ können Sie auch für verschiedene Wurfanzahlen das Spiel simulieren (z.B. mit Mathematica, Excel oder einem anderen beliebigen Programm), die relativen Häufigkeiten bestimmen und diese mit denen in der Abbildung vergleichen.

   Vergleichen Sie die Wurfanzahlen für die verschiedenen Ausgänge! Was fällt ihnen auf?

   Hinweis: Wenn Sie die Aufgabe sowohl rechnerisch als auch durch Simulation lösen, so erhalten Sie 5 Zusatzpunkte.

2. (Reißzwecken; 7 Punkte)

Bei einer Reißzwecke ist die Wahrscheinlichkeit $0,6$, dass Sie auf dem Kopf landet. Hanna wirft 100 Zwecken. Die Zufallsvariable X zählt die Zwecken, die auf dem Kopf landen.

a) Beschreiben Sie das Modell durch einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum und begründen Sie, dass X binomialverteilt ist.

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 von X.

c) Berechnen Sie approximativ $\mathbb{P}(X \leq 60), \mathbb{P}(X > 50), \mathbb{P}(50 \leq X \leq 60)$ und $\mathbb{P}(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$.

d) Bestimmen Sie approximativ das kleinste a, sodass $\mathbb{P}(\mu - a \leq X \leq \mu + a) \geq 0.8$.

e) Die Wahrscheinlichkeit p dafür, dass die Reißzwecke auf dem Kopf landet, soll nun geschätzt werden. Bei 1439 Würfen von 2400 Würfen landete die Zwecke auf dem Kopf. Geben Sie einen konsistent Schätzer $\hat{p}$ für p an. Bestimmen Sie approximativ das kleinste a, sodass $\mathbb{P}(|p - \hat{p}| > a) \leq 0.1$. Was sagt dies über den Schätzer $\hat{p}$ und den wahren Wert p aus?

3. (Approximation und Zufallsvariablen; 7 Punkte)

(a) Zeigen Sie Lemma 6.3 aus der Vorlesung:

Seien $X_i, i \in \mathbb{N}$, eine Folge rellwertiger, unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit Verteilungsfunktion F auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Dann gilt, für jede Borelmenge A, dass

$$\mathbb{P}\left[|\nu_n(A) - \nu(A)| > c\nu(A)\right] \leq \frac{1}{nc^2\nu(A)}.$$

(b) Betrachten Sie eine Zufallsvariable X, die binomialverteilt mit Parametern n und p ist. Durch welche Verteilungfunktion lässt sich die Verteilung von X gut approximieren, falls

(i) $n = 1000$ und $p = 0,2$;

(ii) $n = 500$ und $p = 0.006$.

Simulieren Sie jeweils die entsprechende Verteilung und vergleichen Sie diese graphisch mit den approximierenden Verteilungen! Womit hängt das beobachtete Verhalten zusammen?