

7. Übungsblatt „ Stochastik für Lehramt“

Abgabe bis Mittwoch 10.06.15 in der Vorlesungspause

Dieses Blatt dient zur Wiederholung, der bisher in der Vorlesung behandelten Begriffe.

1. (Erwartungswert und Varianz; 8 Punkte)

Beschreiben Sie die folgenden Modelle durch geeignete Wahrscheinlichkeitsräume, berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen und skizzieren Sie diese. Berechnen Sie zudem ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

- Ein 6-seitiger fairer Würfel wird zweimal geworfen. Die Zufallsvariable gibt die Augensumme der Würfe wieder.
- Bei einem Glücksspiel wird eine Münze einmal geworfen. Bei Zahl gewinnen Sie 5 Euro und bei Kopf verlieren Sie 6 Euro. Die Zufallsvariable gibt den Gewinn bei einem Münzwurf an.
- Ein Würfel wird 4-mal geworfen. Die Zufallsvariable gibt an, wie oft die Zahl 3 gefallen ist.
- In einer Urne befinden sich 12 Kugeln, darunter 4 schwarze und 8 weiße. Daraus werden 6 Kugeln ohne Zurücklegen und ohne Beachtung der Reihenfolge gezogen. Die Zufallsvariable gibt an, wie viele weiße Kugeln gezogen wurden.

2. (Wetten und bedingte Wahrscheinlichkeiten; 5 Punkte)

Alice und Bob vereinbaren ein faires Spiel über 7 Runden. Jeder zahlt 5 Euro als Einsatz und der Gewinner erhält die gesamten 10 Euro. Beim Stand von 2 : 3 muss das Spiel abgebrochen werden. Wäre es fair, den Gewinn in diesem Verhältnis aufzuteilen? Berechnen Sie dazu die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler.

3. (Ameise; 7 Punkte)

Eine Ameise startet von der Zelle 3 aus und wechselt jede Minute zufällig von ihrer Zelle in eine der Nachbarzellen (siehe Abbildung 1). Wenn sie die Zellen 1 oder 6 erreicht, bleibt sie dort für immer gefangen.

- Handelt es sich bei dem oben beschriebenen Prozess $\{X_n; n \geq 0\}$ um eine Markovkette?

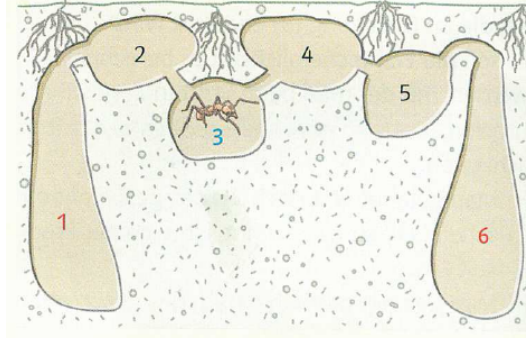


Abbildung 1: Zellen der Ameise

b) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

c) Wir möchten nun die erwartete Zeit berechnen bis die Ameise in eine der Zellen 1 oder 6 gerät. Dafür gehen Sie wie folgt vor:

(i) Fassen Sie die erwartete Zeit bis zur Absorption als Funktion des Anfangswertes auf. Für $k = 1, 2, \dots, 6$ sei

$m_k =$ Erwartete Zeit bis der Prozess in 1 oder 6 absorbiert wird, bei Start in Zelle k .

Leiten Sie nun Rekursionsgleichungen für die m_k 's her.

(ii) Können Sie die Rekursionsgleichungen lösen? Wenn ja, wie sieht die Lösung aus? Geben Sie die erwartete Zeit bis zur Absorption an wenn, die Ameise anfangs in Zelle 3 ist.