

6. Übungsblatt

„Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt“

Abgabe bis Mittwoch 03.06.15 in der Vorlesungspause

1. (Wettermodell)

Diese Aufgabe zählt doppelt!

Im Folgenden betrachten wir das Wettermodell aus dem Abschnitt 4.2, d.h. wir betrachten eine zeitlich homogene Markovkette $(X_n, n \in \mathbb{N}_0)$ mit den Zuständen 0 (= Regen) und 1 (= Sonnenschein). Die Übergangsmatrix ist gegeben durch

$$P = \begin{pmatrix} 1 - p_{01} & p_{01} \\ p_{10} & 1 - p_{10} \end{pmatrix}, \quad 0 < p_{01}, p_{10} < 1.$$

a) Zeigen Sie, dass

$$P^n = \frac{1}{p_{01} + p_{10}} \begin{pmatrix} p_{10} & p_{01} \\ p_{10} & p_{01} \end{pmatrix} + \frac{(1 - p_{01} - p_{10})^n}{p_{01} + p_{10}} \begin{pmatrix} p_{01} & -p_{01} \\ -p_{10} & p_{10} \end{pmatrix},$$

und berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n \rightarrow \infty} P^n$.

b) Bestimmen Sie zunächst allgemein die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse

$$A = \{\text{in 100 Tagen regnet es}\} = \{X_{100} = 0\},$$

$$B = \{\text{in einem Jahr regnet es 3 Tage hintereinander}\} = \{X_{365} = X_{366} = X_{367} = 0\},$$

jeweils unter der Annahme, dass es heute regnet ($= \{X_0 = 0\}$) bzw. dass heute die Sonne scheint ($= \{X_0 = 1\}$). Berechnen Sie dann die Wahrscheinlichkeiten für die konkreten Parameter $p_{01} = 0.4$ und $p_{10} = 0.3$.

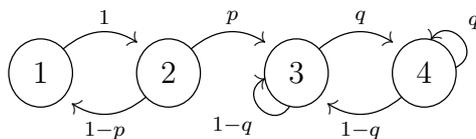
c) Eine invariante Verteilung π der Markovkette löst die Gleichung

$$\pi P = \pi.$$

Mit anderen Worten ist π linksseitiger auf Länge 1 normierter Eigenvektor von P zum Eigenwert 1. Weil π eine Wahrscheinlichkeitsverteilung ist, muss π positive Einträge haben und die Summe der Einträge muss 1 sein. Bestimmen Sie die invariante Verteilung für unser Wettermodell. Ist diese eindeutig?

2. (Klassen und invariante Verteilungen)

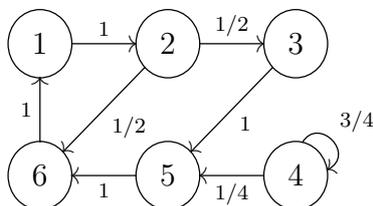
Sei die folgende Markovkette gegeben:



Geben Sie in Abhängigkeit von $p, q \in [0, 1]$ die wesentlichen und unwesentlichen Klassen der Markovkette an und diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit invarianter Verteilungen.

3. (Eigenschaften einer Markovkette)

Sei X eine stationäre Markovkette auf $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ mit graphischer Darstellung:



Bestimmen Sie:

1. die Übergangsmatrix von X ,
2. die Klassen von S , und
3. alle invarianten Verteilungen.