Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

5. Übungsblatt
„Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Montag 18.05.15 in der Vorlesungspause

---

1. (Große Abweichungen)

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige Rademachervariablen, d.h. $\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$ für $i \geq 1$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{P}\left(n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i \geq x\right) \leq \exp(-nI(x)),$$

wobei

$$I(x) = \frac{1}{2}(1-x)\ln(1-x) + \frac{1}{2}(1+x)\ln(1+x).$$

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 4 von Blatt 3 und optimieren Sie den Parameter.

2. (Pflanzenzucht)

Ein Pflanzen-Gen besitze die beiden Allele A und a. Ein klassisches Verfahren zur Züchtung von Pflanzen vom Genotyp AA bzw. aa ist die Selbstbefruchtung. Begründe, dass die Übergangswahrscheinlichkeiten

$$p(x,y) \;\equiv\; \mathbb{P}\big[\,\text{Genotyp } y \text{ in Generation } n+1 \,|\, \text{Genotyp } x \text{ in Generation } n\,\big]$$

durch $p(Aa, AA) = p(Aa, aa) = 1/4$, $p(Aa, Aa) = 1/2$ und $p(aa, aa) = p(AA, AA) = 1$ gegeben sind. Berechne für beliebiges n die n-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeit

$$p^n(Aa, Aa) \;=\; P\big[\, Aa \text{ in Generation } n \,|\, Aa \text{ am Anfang}\,\big].$$

3. (Urnenmodell)

Es seien N weisse und N schwarze Kugeln auf zwei Urnen verteilt, so dass in jeder Urne N Kugeln enthalten sind. Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt n wird beschrieben durch eine Zufallsvariable X_n, die die Anzahl der weissen Kugeln in der ersten Urne angibt. Bei jedem Schritt wird zufällig je eine Kugel aus jeder Urne gezogen und die beiden Kugeln werden vertauscht. Zeigen Sie, dass X_n eine Markovkette mit Zustandsraum $\{0, \ldots, N\}$ ist. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette.

4. (Bernoulli Zufallsvariablen)
Sei $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Bernoulli Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\beta_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\beta_n = 0) = q, \text{ wobei } p + q = 1 \text{ für } n = 1, 2, \ldots$$

a) Für $n = 2, 3, \ldots$ definieren wir den stochastischen Prozess X_n durch

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 1 \\ 1, & \text{falls } \beta_{n-1} = 1, \beta_n = 0 \\ 2, & \text{falls } \beta_{n-1} = 0, \beta_n = 1 \\ 3, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 0 \end{cases}$$

(i) Beweisen Sie, dass der Prozess $\{X_n, n = 2, 3, \ldots\}$ eine Markovkette ist.

(ii) Berechnen Sie die Übergangsmatrix P.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_{00}(3)$.
Hinweis: $p_{00}(3) = \mathbb{P}(X_{n+3} = 0 | X_n = 0)$ *für* $n \geq 2$.

b) Für $n = 2, 3, \ldots$ definieren wir den stochastischen Prozess X_n durch

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Prozess $\{X_n, n = 2, 3, \ldots\}$ keine Markovkette ist.