Institut für angewandte Mathematik
Sommersemester 2015
Prof. Dr. Anton Bovier, Lisa Hartung

3. Übungsblatt
„Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt"

Abgabe bis Mittwoch 06.05.15 in der Vorlesungspause

---

1. (Eigenschaften des Erwartungswertes)
Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein endlicher Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

a) Beweisen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

(i) Jede Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$ ist messbar.

(ii) Der Erwartungswert von X kann geschrieben werden als

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) p(\omega),$$

wobei p der zu $\mathbb{P}$ gehörige Wahrscheinlichkeitsvektor ist, also $p(\omega) = \mathbb{P}(\{\omega\})$.

b) Seien X_1, X_2 Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ die Linearkombinationen $\alpha X_1 + \beta X_2$ Zufallsvariablen sind, und es gilt, dass

$$\mathbb{E}\left[\alpha X_1 + \beta X_2\right] = \alpha \mathbb{E}[X_1] + \beta \mathbb{E}[X_2].$$

c) Zeigen Sie, dass X^2 eine Zufallsvariable ist und beweisen Sie, dass $\mathbb{E}\left[(X - \mathbb{E}[X])^2\right] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 \equiv \operatorname{var}(X)$.

2. (Erwartungswert von positiven Zufallsvariablen mit ganzzahligen Werten)

a) Sei T eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{Z}_+$. Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[T] \;=\; \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T \geq k].$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\mathbb{E}[T] = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} k \mathbb{P}(T = k)$.

b) Berechnen Sie, wieviele Würfe im Schnitt nötig sind, bis beim Würfeln mit einem fairen Würfel zum ersten Mal eine 6 fällt.

3. (Zufallspermutationen)

a) Eine aufsteigende Teilfolge einer Permutation $\omega \in S_n$ ist durch eine Sequenz

$$\omega(i_1) < \omega(i_2) < \ldots < \omega(i_k)$$

mit $1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n$ gegeben. Sei $N(\omega)$ die Anzahl der aufsteigenden Teilfolgen der Permutation ω. Zeigen Sie, dass für eine gleichverteilte Zufallspermutation aus S_n gilt:

$$\mathbb{E}[N] \;=\; \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k!}\binom{n}{k}.$$

b) Geben Sie einen Algorithmus an, der eine Zufallspermutation aus S_n erzeugt.

4. (Exponentielle Abschätzungen)

a) Sei X eine diskrete reellwertige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeigen Sie, dass für alle $c, t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}[X \geq c] \;\leq\; e^{-ct}\, \mathbb{E}\left[e^{tX}\right].$$

b) Für $i = 1, 2, 3$ sei

$$Y_i(t) \equiv e^{tX_i}, \qquad \text{mit } t \geq 0,$$

wobei

$$X_1 \sim \mathrm{Ber}(p), \quad X_2 \sim \mathrm{Bin}(n,p), \quad X_3 \sim \mathrm{Poi}(\rho).$$

(i) Skizzieren Sie die Verteilungsfunktion von $Y_1(t)$ und $Y_2(t)$.

(ii) Berechnen Sie jeweils den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_i(t)]$.

(iii) Diskutieren Sie das Verhalten der Erwartungswerte in Abhängigkeit des Parameters t.