Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis I

Aufgabe 1. Beweise:

i) $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

ii) $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2$

iii) $(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\cdots(1+x^{2^n}) = \frac{1-x^{2^{n+1}}}{1-x}$ für $x \neq 1$

Aufgabe 2. Setze $\mathbb{N}_n := \{1, \ldots, n\}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$.

i) Zeige, dass für jede Abbildung $f : \mathbb{N}_n \to \mathbb{N}_m$ mit $n > m$ stets zwei verschiedene Zahlen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}_n$ existieren, für die $f(n_1) = f(n_2)$ gilt.

Benutze dabei das sogenannte "Schubfach-Prinzip": Wenn man $n+1$ Objekte auf n Schubfächer verteilt, enthält mindestens ein Fach mindestens 2 Elemente.

ii) Es sei $a_1, \ldots, a_n$ irgendeine Anordnung der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und n sei ungerade. Zeige, dass dann das Produkt $(a_1 - 1)(a_2 - 2)\cdots(a_n - n)$ stets gerade ist.

Aufgabe 3.

i) Finde eine zur folgenden Aussage äquivalente Aussage, die neben den Variablen A, B, C, D nur noch Klammern und einige der 5 Junktoren $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ und $\Leftrightarrow$ enthält:

"Dafür, dass mindestens eine der beiden Aussagen A und B zutrifft, ist es notwendig, dass weder C noch D gilt"

ii) Zeige mit Hilfe einer Wahrheitstabelle, dass die folgende Aussage wahr ist:

$$(A \Rightarrow B) \wedge \neg B \quad \Rightarrow \quad \neg A$$

iii) "Wenn es heute regnet, nehme ich einen Schirm mit. Regnet es nicht, nehme ich eine Badehose mit. Allerdings gehe ich stets Schwimmen, wenn ich eine Badehose dabei habe, und ich werde dann immer krank. Wenn ich dagegen einen Schirm dabei habe, werde ich nie krank. Folglich gilt in jedem Fall: Ich nehme heute die Badehose nicht mit oder ich nehme heute den Schirm nicht mit."

Ist der letzte Schluss richtig oder falsch? Die Antwort bitte begründen!

Aufgabe 4.

i) Bekanntlich impliziert eine Aussage der Form $\exists x : \forall y : A(x,y)$ die Aussage $\forall y : \exists x : A(x,y)$. Zeige mit Hilfe eines Gegenbeispiels, dass umgekehrt $\exists x : \forall y : A(x,y)$ nicht zu gelten braucht, wenn $\forall y : \exists x : A(x,y)$ gilt.

ii) Finde eine zu

$$\forall y : \exists x : \neg A(x,y) \quad \Rightarrow \quad \exists x : \forall y : \neg A(x,y)$$

äquivalente Formel, in der der Junktor $\neg$ nicht mehr vorkommt. Die Antwort bitte begründen!

iii) Die Formel $E(x)$ (bzw. $g(x)$ bzw. $L(x)$ bzw. $R(x)$) stehe für die Aussage "x ist ein Elefant" (bzw. "x ist grau" bzw. "x ist ein Löwe" bzw. "x ist ein Raubtier").

Finde für die folgenden beiden Aussagen äquivalente Formulierungen, in denen neben der Variablen x sowie den obigen vier Formeln nur noch Quantoren, Junktoren, Klammern und Doppelpunkte vorkommen:

- Elefanten sind grau
- Der Löwe ist ein Raubtier