Stochastische Analysis

Karl-Theodor Sturm

Literatur:

- I. Karatzas, S. Shreve: Brownian Motion and Stochastic Calculus. 2nd ed. Springer '91
- D. Revuz, M. Yor: Continuous Martingales and Brownian Motion, 2nd ed. Springer '94
- W. Hackenbroch, A. Thalmaier: Stochastische Analysis, Teubner '91

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 0

Einführung

0.1 Analysis und gewöhnliche DGl.

Die Erfindung der *Analyis* (= Differential- und Integralrechnung) durch Newton (1643-1727) und Leibniz (1646-1716) löste den Siegeszug der Mathematik bei der Beschreibung von Naturphänomenen und ökonomischen Zusammenhängen aus und führte zur Mathematisierung von Physik, Chemie, Biologie, Technik, Ökonomie, ...
Gewöhnliche Differentialgleichungen dienen der Modellierung von Phänomenen der realen Welt: $dy_t = b(t, y_t)dt$. Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung erlaubt äquivalente Formulierung in differentieller und integreller Form:

$$\dot{y_t} = b(t, y_t) \quad \text{bzw.} \quad y_T = y_0 + \int\limits_0^T b(t, y_t)dt$$

0.2 Stochastische Analysis und stochastische Differentialgleichungen

Die *Stochastische Analysis* hat die Beschreibung von Naturphänomenen zum Ziel, die stochastischen (= nicht deterministischen) Einflüssen unterworfen sind. Dies geschieht z.B. mittels *stochastischer Differentialgleichungen* der Form

$$dY_t = b(t, Y_t)dt + \sigma(t, Y_t)dM_t. \tag{1}$$

Formal führt das zu

$$\dot{Y}_t = b(t, Y_t) + \sigma(t, Y_t)\dot{M}_t. \tag{2}$$

$b(t, Y_t)$ bezeichnet hier den Einfluss des (deterministischen) „Signals“, $\sigma(t, Y_t)\dot{M}_t$ den Einfluß des (stochastischen) „Rauschens“.
Für $(M_t)_{t\geq 0}$ wählt man ein stetiges Martingal (also einen stochastischen Prozeß ohne erkennbare Signalkomponente), typischerweise die Brownsche Bewegung (BB).

Problem: für solche (M_t) ist fast keine Trajektorie differenzierbar! Es gibt keine pfadweise *stochastische Differentiation*! (Lediglich eine Art „stochastische Differentiation im distributiven Sinne“ im Rahmen des sog. Malliavin-Kalküls, von Paul Malliavin ab 1978 entwickelt.)
Ausweg: Wir vergessen die differentielle Interpretation (2) und definieren (1) mittels der folgenden integralen Version

$$Y_T = Y_0 + \int_0^T b(t, Y_t)dt + \int_0^T \sigma(t, Y_t)dM_t \tag{3}$$

Hierzu müssen wir *stochastischen Integralen* der Form $\int_0^T X_t dM_t$ eine Bedeutung geben (für $(M_t)_t$ Martingal, $(X_t)_t$ „messbarer“ stochastischer Prozeß).
Das geht! *Itô Integral* (Kyoshi Itô).

- R. Paley, N. Wiener, A. Zygmund (1933): (X_t) determ, (M_t) BB
- K. Itô (1942,44): (X_t) stoch., (M_t) BB
- H. Kunita, S. Watanabe (1967): (X_t) stoch., (M_t) Martingal

0.3 Die Idee des Itô-Integrals

Definition 0.3.1. $Y_t(\omega) = \int_0^T X_t(\omega)dM_t(\omega)$ als L^2-Limes der Approximationen

$$Y_T^{\Delta(n)}(\omega) = \sum_{t_i \in \Delta(n)} X_{t_{k-1}}(\omega) \cdot (M_{t_k \wedge T}(\omega) - M_{t_{k-1} \wedge T}(\omega)) \tag{4}$$

für Partitionen $\Delta(n)$ von $[0, \infty[$ mit Feinheit $|\Delta(n)| \to 0$.

Für eine große Klasse von (M_t) und (X_t) existiert dieser Limes und es gilt:

- $(Y_t)_t$ ist stetiges Martingal
- $E(Y_t^2) = E \int_0^t X_s^2 d\langle M \rangle_s$
  mit $\langle M \rangle$ = *quadratische Variation* von $M = (M_t)_{t \geq 0}$ (z.B. $\langle M \rangle_t = t$ für BB).

Achtung: Diese Eigenschaften gelten nicht, falls man in (4) $X_{t_{k-1}}$ durch X_{t_k} (rückläufiges Itô-Integral) oder $\frac{1}{2}(X_{t_{k-1}} + X_{t_k})$ (Stratonovich-Integral) ersetzt! Allerdings gilt für das Itô-Integral nicht $df(M_t) = f'(M_t)dM_t$ (das gilt für klassische Integrale und für das Stratonovich-Integral), sondern die *Itô-Formel*

$$df(M_t) = f'(M_t)dM_t + \frac{1}{2}f''(M_t)d\langle M \rangle_t$$

(Kettenregel für stochastische Integrale)

0.4 Stochastische DGl und partielle DGl

Sei $(M_t)_t$ die d-dim BB mit infinitesimalem Erzeuger $\frac{1}{2}\Delta = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ und $(Y_t)_t$ die Lösung der SDGl $dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dM_t$.
Dann hat $(Y_t)_t$ folgenden infinitesimalen Erzeuger

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

mit b (Drift-Vektor) wie oben und $a = \sigma\sigma^*$ (Diffusionsmatrix), d.h. $a_{ij}(x) = \sum\limits_{k=1}^{d} \sigma_{ik}(x) \cdot \sigma_{jk}(x)$.
Es gilt also

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(E_x f(Y_t) - f(x)) = (Lf)(x).$$

$\Rightarrow$ Partielle DGl lassen sich mit Hilfe stochstischer DGl lösen!

Kapitel 1

Filtrationen und Stoppzeiten

Im folgenden sei stets vorgegeben ein W.-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

1.1 Stoch. Prozesse (Wiederholung)

Definition 1.1.1. Sei $(E, \mathcal{E})$ ein Meßraum. Eine Familie $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt *stochastischer Prozess* (auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$), falls $\forall t \geq 0$: $X_t : \Omega \to E$ ist $\mathcal{F}$-meßbar (genauer: $\mathcal{F}/\mathcal{E}$-meßbar) (d.h. eine Zufallsvariable). $t \in [0, \infty[$ wird als Zeit interpretiert, E als Zustandsraum (meist $E = \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{E} = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$).
Für fixes $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung

$$X_\bullet(\omega) : \mathbb{R}_+ \to E, \quad t \mapsto X_t(\omega)$$

Trajektorie. Wir verwenden folgende äquivalente Interpretationen:

$$X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E, \quad (t, \omega) \mapsto X_t(\omega)$$

$$X : \Omega \to E^{\mathbb{R}_+}, \quad \omega \mapsto X_\bullet(\omega) \quad \text{(zufälliges Auswählen von Trajektorien).}$$

Zwei stochastische Prozesse X, Y (auf selbem W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit selbem Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$) heißen

- *Modifikationen* voneinander, falls
  $P(X_t = Y_t) = 1$ für alle $t \geq 0$.

- *ununterscheidbar* , falls $P(X_t = Y_t$ für alle $t \geq 0) = 1$, m.a.W. $P(X_\bullet = Y_\bullet) = 1$.

Bemerkung 1.1.2. Ununterscheidbar $\Rightarrow$ Mod. voneinander!
Umkehrung gilt i.a. nicht! (z.B. $\Omega = [0,1], P = \lambda^1, X_t(\omega) = 0, (\forall t, \omega)$ und

$$Y_t(\omega) := \begin{cases} 1 & \text{falls } t = \omega \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Lemma 1.1.3. *Seien f.a. Trajektorien von X, Y rechtsseitig stetig. Dann gilt: Ununterscheidbar $\Leftrightarrow$ Mod. voneinander.*

Beweis. Übung. □

1.2 Filtrationen

Definition 1.2.1. Eine Familie $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ heißt *Filtration* (=Filtrierung) falls $\forall 0 \leq s \leq t < \infty : \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_t$ sind σ-Algebren auf Ω mit $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$.
Intuitiv: $\mathcal{F}_t$ enthält die bis zum Zeitpunkt $t \in [0, \infty[$ verfügbare Information. (Erlaubt Unterscheidung von Vergangenheit, Gegenwart und Zukunft.)
Ist $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ W-Raum und ist $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ eine Filtierung mit $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ $(\forall t)$, so heißt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *filtrierter W-Raum*. Man setzt:
$\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s, \mathcal{F}_{t-} = \sigma(\mathcal{F}_s : s < t), \mathcal{F}_{0-} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t : t \geq 0) = \sigma(\mathcal{F}_{t+} : t \geq 0) = \sigma(\mathcal{F}_{t-} : t \geq 0)$.
Offenbar gilt $\mathcal{F}_{t-} \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_{t+}$.
$(\mathcal{F}_t)$ heißt *rechtsstetig*, falls $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$ $(\forall t \geq 0)$. (Z.B. ist $(\mathcal{F}_{t+})_{t\geq 0}$ eine rechtsstetige Filtration.)
Der filtrierte W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ heißt *vollständig*, wenn $\mathcal{F}_0$ alle $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen enthält.
Eine Menge $A \subset \Omega$ heißt $(\mathcal{F}, P)$-Nullmenge, falls $\exists A' \in \mathcal{F}$ mit $A' \supset A$ und $P(A') = 0$.

Bemerkungen 1.2.2.
a) Ist $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vollst., so ist jeder der W-Räume $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ vollständig.
b) Umkehrung gilt nicht!
Es gibt i.a. mehr $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen als $(\mathcal{F}_0, P)$-Nullmengen.
c) Man erhält einen vollständigen filtr. W-Raum durch *Augmentieren*: ersetze $\mathcal{F}$ und $\mathcal{F}_t$ durch $\mathcal{F}' = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ bzw. ${\mathcal{F}_t}' = \sigma(\mathcal{F}_t \cup \mathcal{N})$ mit
$\mathcal{N}$ = Menge der$(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen.

(Hinweis: Statt $(\mathcal{F}, P)$-Nullmengen verwenden manche Autoren bei obiger Definition $(\mathcal{F}_\infty, P)$-Nullmengen.)

Definition 1.2.3. Der filtrierte W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ *genügt den üblichen Bedingungen* (bzw. ist ein standard filtrierter W-Raum), falls er vollständig ist und die Filtration $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig ist.

Bemerkung 1.2.4. Standard-Erweiterung: 1. Augmentieren: ${\mathcal{F}_t}'$ und $\mathcal{F}'$,
2. bergang zu rechten Limiten $\Rightarrow (\Omega, \mathcal{F}'_{t+}, \mathcal{F}', P)$ standard filtrierter W-Raum.

1.3 Adaptierte Prozesse

Definition 1.3.1. a) Gegeben: Stochastischer Prozess X auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Werten in $(E, \mathcal{E})$.

$$\mathcal{F}_t{}^X := \sigma(X_s : s \leq t)$$

heißt die von X *erzeugte Filtration*[1].

b) X heißt an eine vorgegebene Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ *adaptiert*, falls $\mathcal{F}_t{}^X \subset \mathcal{F}_t (\forall t \geq 0)$ oder m.a.W., falls
X_t $\mathcal{F}_t$-meßbar $(\forall t \geq 0)$.

Beispiele 1.3.2. a) (X_t) ist an $(\mathcal{F}_t{}^X)$ adaptiert. (Trivial)

b) Sei $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ gegeben. Definiere $X_t := E(f|\mathcal{F}_t)$
$\Rightarrow (X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ adaptiert.

c) Geg.: $(X_t)_{t\geq 0}$ und $(Y_t)_{t\geq 0}$ ununterscheidbar, $(X_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert und $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ vollständig $\Rightarrow (Y_t)_{t\geq 0}$ an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert.
(Achtung: Hier reicht nicht, daß $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$ vollst. ist!)

1.4 Progressiv messbare Prozesse

Definition 1.4.1. Ein Prozess X heißt *progressiv messbar* bzgl. einer Filtration $(\mathcal{F}_t)_t$, falls für alle $t \geq 0$: die Abbildung

$$X : [0,t] \times \Omega \to E, \quad (s, \omega) \mapsto X_s(\omega)$$

$\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar ist.

Proposition 1.4.2. *Sei X ein stochastischer Prozess mit Werten im topologoschen Raum E, rechtsstetig (d.h. alle(!) Trajektorien $t \mapsto X_t(\omega)$ sind rechtsstetig) (oder linksstetig), und adaptiert an $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. Dann ist X progressiv messbar.*

Beweis. Sei X rechtsstetig, $t > 0$ fix. Wir approximieren X durch $X^{(n)}$ mit

$$X_s^{(n)}(\omega) := X_{(k+1)t2^{-n}}(\omega) \text{ für } s \in]kt2^{-n}, (k+1)t2^{-n}], \qquad k = 0, 1, \dots, 2^n - 1,$$

und $X_0^{(n)}(\omega) := X_0(\omega)$. Dann ist $X^{(n)} : (s, \omega) \mapsto X_s^{(n)}(\omega)$ $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar.
Wegen Rechtsstetigkeit: $\lim\limits_{n\to\infty} X_s^{(n)}(\omega) = X_s(\omega)$ für alle $(s, \omega) \in [0,t] \times \Omega$.
$\Rightarrow X : [0,t] \times \Omega \to E$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-meßbar. $\square$

[1] Oft bezeichnet man die von einem Prozess X erzeugte Filtration $(\mathcal{F}_t{}^X)$ mit $(\mathcal{F}_t{}^0)$ und ihre Standard-Erweiterung dann mit $(\mathcal{F}_t)$.

1.5 Stoppzeiten

Definition 1.5.1. Eine Abbildung $T : \Omega \to [0, \infty]$ heißt *Stoppzeit* bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, falls $\forall t \geq 0$:

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t,$$

wobei $\{T \leq t\} := \{\omega \in \Omega : T(\omega) \leq t\}$.
Sie heißt *schwache Stoppzeit* (oder Optionszeit) bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, falls $\forall t \geq 0$

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t.$$

Bemerkungen 1.5.2. a) Jede Stoppzeit ist schwache Stoppzeit. Jede "konstante Zeit" $T \equiv t_0$ ist eine Stoppzeit.

b) T ist schwache Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t) \Leftrightarrow T$ ist Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$.

c) $(\mathcal{F}_t)$ rechtsstetig $\Rightarrow$ Jede schwache Stoppzeit ist Stoppzeit.

d) T ist Stoppzeit $\Leftrightarrow X_t = 1_{[0,T[}(t)$ ist adaptiert, (denn $\{X_t = 0\} = \{T \leq t\}$).

Proposition 1.5.3. *a) Mit S und T sind auch $S \wedge T, S \vee T, S + T$ (schwache) Stoppzeiten.*

b) Mit $T_n (\forall n \in \mathbb{N})$ ist auch $\sup_n T_n$ eine (schwache) Stoppzeit und $\inf_n T_n$ eine schwache Stoppzeit.
(Denn: $\left\{\sup_n T_n \leq t\right\} = \bigcap_n \{T_n \leq t\}$ und $\left\{\inf_n T_n < t\right\} = \bigcup_n \{T_n < t\}$.)

c) Jede schwache Stoppzeit T läßt sich monoton durch Stoppzeiten T_n mit endlichem Wertebereich approximieren:
$T_n := (k+1)2^{-n}$ *auf* $\{k2^{-n} \leq T < (k+1)2^{-n}\}, k = 0, 1, \ldots, 4^n,$
$T_n := +\infty$ *sonst.*
$\Rightarrow T_n \to T, T_n \geq T_{n+1} > T$ *und* $T_n > T$ *auf* $\{T < \infty\}$.

Proposition 1.5.4 (Galmarino's Test). *Sei $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ (oder $\Omega = D(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d) = \{\omega : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^d \text{ cadlag}\}$) $X_t(\omega) = \omega(t)$ und $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$. Dann ist T (schwache) Stoppzeit genau dann, wenn $\forall t \geq 0, \omega, \omega' \in \Omega$ gilt:*

$$\left(T(\omega) \underset{(<)}{\leq} t \text{ und } \forall s \leq t : X_s(\omega) = X_s(\omega') \right) \Rightarrow T(\omega) = T(\omega').$$

1.6 Treffer- und Eintrittszeiten

Definition 1.6.1. Sei (X_t) an $(\mathcal{F}_t)$ adaptierter Prozeßund $A \subset E$.

$$T_A(\omega) := \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in A\} \quad \text{Eintrittszeit von } A$$

$$T_A^*(\omega) := \inf\{t > 0 : X_t(\omega) \in A\} \quad \text{Trefferzeit von } A$$

(jeweils mit $\inf \emptyset := +\infty$.)

Satz 1.6.2. *Sei $X = (X_t)_{t\geq 0}$ adaptiert. (an vorgeg. $(\mathcal{F}_t)_t$) und rechtsstetig (d.h. E ist topologischer Raum und alle Trajektorien $X_\bullet(\omega)$ sind rechtsstetig).*

a) $T_A^* = T_A$ schw. Stoppzeit ($\forall A$ offen $\subset E$)

b) Ist X sogar stetig und E metrisierbar, so ist
T_A Stoppzeit ($\forall A \subset E$ abgeschlossen)
und T_A schw. Stoppzeit ($\forall A$ F_σ-Menge, d.h. $A = \bigcup A_n$ mit A_n abgeschlossen).

c) (ohne Beweis) Genügt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$ den üblichen Bedingungen, so ist T_A Stoppzeit ($\forall A \in \mathcal{E} = \mathcal{B}(E)$)

Beweis. a) Stets ist $\{T_A \geq t\} = \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t[\}$ und $\{T_A^* \geq t\} = \{X_s \notin A : \forall s \in]0,t[\}$. Daher bei offenem A und rechtsstetigem X:

$$\begin{aligned}\{T_A \geq t\} = \{T_A^* \geq t\} &= \{X_s \notin A : \forall s \in [0,t[\cap\mathbb{Q}\} \\ &= \bigcap_{s\in[0,t[\cap\mathbb{Q}} \{X_s \notin A\} \in \mathcal{F}_t\end{aligned}$$

$\Rightarrow T_A$ ist schw. Stoppzeit.

b) Für A abgeschlossen gilt $A = \bigcap_n B_n$ mit $B_n := \{x : d(x,A) < \frac{1}{n}\}$.
$\Rightarrow T_A = \sup_n T_{B_n}$ ist schwache Stoppzeit nach a).
Es gilt sogar $\forall n : T_A > T_{B_n}$ auf $\{T_A > 0\} \cap \{T_{B_n} < \infty\}$.
$\Rightarrow \forall t > 0 : \{T_A \leq t\} = \bigcap_n \{T_{B_n} < t\} \in \mathcal{F}_t$.

Ist $A = \bigcup A_n$ mit A_n abgeschlossen ($\Rightarrow T_{A_n}$ Stoppzeit), so ist $T_A = \inf_n T_{A_n}$ schwache Stoppzeit.

□

Beispiele 1.6.3. $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$, X Koordinatenprozess (d.h. $X_t(\omega) = \omega(t)$) und $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$.
Sei $A \subset \mathbb{R}^d, \neq \emptyset$ offen.
$\Rightarrow T_A^*$ ist schwache Stoppzeit, aber keine Stoppzeit.
$\Rightarrow \mathcal{F}_t \neq \mathcal{F}_{t+}$
Intuitive Begründung (genaueres s. Übung "Galmarino's Test"):
Wähle ω mit $\omega(0) \notin \overline{A}$ und $\omega(t) \in A$ für ein $t > 0$, d.h. für $t_0 = T_A^*(\omega)$ gilt: $0 < t_0 < \infty$. Wegen Stetigkeit ist $\omega(t_0) = \partial A$. Def. neuen Pfad $\omega' \in \Omega$ durch $\omega'(t) = \omega(t \wedge t_0)$. Offenbar $\omega' \notin A (\forall t \geq 0)$ und damit $T_A^*(\omega') = +\infty$. Nun gilt:
$\omega(t) = \omega'(t) \quad \forall t \leq t_0$
$\Rightarrow \forall \Gamma \in \mathcal{F}_{t_0} : \omega \in \Gamma \Leftrightarrow \omega' \in \Gamma \quad$ (Galmarino)
Aber offensichtlich $\omega \in \{T_A^* \leq t_0\}$ und $\omega' \notin \{T_A^* \leq t_0\}$
$\Rightarrow \{T_A^* \leq t_0\} \notin \mathcal{F}_{t_0} \Rightarrow T_A^*$ keine Stoppzeit $\Rightarrow (\mathcal{F}_t)$ nicht rechtsstetig.

<u>Weitere Beispiele für (schwache) Stoppzeiten:</u>
$A, B \subset E$ disjunkt, $T_0 := 0, n \in \mathbb{N}_0$
$T_{2n+1} = \inf\{t \geq T_{2n} : X_t \in A\}$

$T_{2n+2} = \inf\{t \geq T_{2n+1} : X_t \in B\}$
(z.B. $A = \mathbb{R}^d \setminus B$, schlecht bei BB, dann f.s. $T_n = T_1 \quad \forall n$)

Keine (schwache) Stoppzeit
Letzte (oder vorletzte etc.) Austrittszeit aus A
$L_A = \sup\{t \geq 0 : X_t \in A\}$.
Denn (intuitiv): Ist $L_A(\omega) = t$ so weiß ω das zum Zeitpunkt t (und auch unmittelbar danach) noch nicht!! (sondern erst am Ende seiner Tage.)

1.7 Die T-Vergangenheit

Definition 1.7.1. Für Stoppzeit T sei

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

die σ-Algebra der T-Vergangenheit.
Analog läßt sich für schwache Stoppzeiten T definieren

$$\mathcal{F}_{T+} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T < t\} \in \mathcal{F}_t \text{ für alle } t \geq 0\}$$

Beides sind tatsächlich σ-Algebren (Beweis wie im diskreten Fall). Jede Stoppzeit T ist $\mathcal{F}_T$-meßbar, jede schwache Stoppzeit $\mathcal{F}_{T+}$-meßbar. $\mathcal{F}_T$ besteht aus den Ereignissen, die bis zum zufälligen Zeitpunkt T eintreten. Stets ist $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_{T+}$. Für $T \equiv t$ ist $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}_t$ und $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{F}_{t+}$.

Bemerkungen 1.7.2. Wie im diskreten Fall gelten folgende Eigenschaften:

a) $S \leq T \Rightarrow \mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$

b) $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

c) $E(.|\mathcal{F}_{S\wedge T}) = E(E(.|\mathcal{F}_S)|\mathcal{F}_T)$

d) T_n schwache Stoppzeit ($\forall n \in \mathbb{N}$), $T = \inf\limits_n T_n$ ($\Rightarrow$ schwache Stoppzeit) $\Rightarrow \bigcap\limits_n \mathcal{F}_{T_{n+}} = \mathcal{F}_{T+}$

Kurze Wiederholung: Sei $\mathcal{G}_t := \mathcal{F}_{t+}$. Dann gilt:
T schwache Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{F}_t) \Leftrightarrow T$ Stoppzeit bzgl. $(\mathcal{G}_t)$ und $\mathcal{F}_{T+} = \mathcal{G}_T$.

Satz 1.7.3. *Sei X progr. meßb. und T eine Stoppzeit.*

a) $X_T : \{T < \infty\} \to E, \quad \omega \mapsto X_{T(\omega)}(\omega)$ ist $\mathcal{F}_T$-messbar.

b) Der gestoppte Prozeß $X^T : (t, \omega) \mapsto X_{T(\omega)\wedge t}(\omega)$ ist progressiv meßbar. (sowohl bzgl. $(\mathcal{F}_t)_t$ als auch bzgl. $(\mathcal{F}_{t\wedge T})_{t\geq 0}$).

Beweis. a) T ist $\mathcal{F}_T$-messbar $\Rightarrow$ für fixes $t \geq 0$ gilt:

$$T^* : \{T \leq t\} \to [0,t] \times \Omega, \quad \omega \mapsto (T(\omega), \omega)$$

ist $\mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}/\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar, denn für $B \in \mathcal{B}([0,t])$ und $A \in \mathcal{F}_t$ gilt:

$$\{T^* \in B \times A\} \cap \{T \leq t\} = \{T \in B\} \cap A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Progressive Messbarkeit von $X : \mathbb{R}_+ \times \Omega \to E$ bedeutet $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t/\mathcal{E}$-Messbarkeit von X auf $[0,t] \times \Omega$.
$\Rightarrow \mathcal{F}_t \cap \{T \leq t\}/\mathcal{E}$-Messbarkeit von $X_T = X \circ T^*$ auf $\{T \leq t\}$.
Das gilt $\forall t \geq 0$
$\Rightarrow X_T$ ist $\mathcal{F}_T/\mathcal{E}$-messbar auf $\{T < \infty\}$.

b) Für fixes $t \geq 0$ gilt:
$T_t : \Omega \to [0,t] \times \Omega$, $\omega \mapsto (T(\omega) \wedge t, \omega)$ ist $\mathcal{F}_{t \wedge T}/\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$-messbar
$\Rightarrow T_t^* : [0,t] \times \Omega \to [0,t] \times \Omega$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge T}$-messbar.
Da X progressiv messbar ist, gilt:
$X^T = X \circ T_t^* : [0,t] \times \Omega \to E$, $(s,\omega) \mapsto X_s^T(\omega)$ ist $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_{t \wedge T}/\mathcal{E}$-messbar

□

1.8 Treffer-Verteilung

Korollar 1.8.1. *Sei X progr. messbar und T schwache Stoppzeit. Dann defeniert*

$$\nu_T(C) = \mathbb{P}(X_T \in C, T < \infty) \quad (\forall C \in \mathcal{E})$$

ein Maß ν_T auf $(E, \mathcal{E})$.
Speziell für $T = T_A$ heißt ν_T "Trefferverteilung"*. Ist $T < \infty$ f.s., so ist ν_T ein W-Maß, nämlich das Bildmaß $\nu_T = (X_T)_* P = P \circ X_T^{-1}$.*

Beweis. Sei $P^0(C) = P(C \cap \{T < \infty\}) \Rightarrow P^0$ Maß auf $(\Omega, \mathcal{F})$ bzw. äquiv. auf $(\Omega^0, \Omega^0 \cap \mathcal{F})$ mit $\Omega^0 := \{T < \infty\} \subset \Omega$. Auf Ω^0 ist X_T $\mathcal{F}_{T+}$-messbar, also $\mathcal{F}$-messbar.
$\Rightarrow \nu_T = P^0 \circ X_T^{-1}$ ist Maß. □

Lemma 1.8.2. *Sei X stetig und $T = T_A$ mit $A \subset E$ abgeschlossen. Dann sind die Vert. von T und X_T, also $P(T \in \cdot)$ und $\nu_T(\cdot) = P(X_T \in \cdot, T < \infty)$, durch die endl.-dimensionalen Verteilungen von X festgelegt.*

Beweis. Wir zeigen die Behauptung für ν_T. Es genügt z.z. $\nu_T(C)$ ist $\forall C \subset E$ abgeschlossen durch die endl.-dim. Verteilungen festgelegt. Hierfür gilt

$$\begin{aligned}
\nu_T(C) &= P(\{X_T \in C\} \cap \{T < \infty\}) \\
&= P(\{\exists t \in \mathbb{R}_+ : \forall s \in [0,t[: X_s \notin A \text{ und } X_t \in A \cap C\}) \\
&= P(\{\exists k \in \mathbb{N} : \forall n \geq k : \exists t \in \mathbb{Q}_+ : \forall s \in [0,t[: X_s \notin \mathcal{B}_{1/n}(A), X_t \in \mathcal{B}_{2/n}(A \cap C)\}) \\
&= P(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} \bigcap_{n \geq k} \bigcup_{t \in \mathbb{Q}_+} \bigcap_{s \in \mathbb{Q}_+ \cap [0,t[} \{X_s \notin \mathcal{B}_{1/n}(A)\} \cap \{X_t \in \mathcal{B}_{2/n}(A \cap C)\}) \square
\end{aligned}$$

Kapitel 2

Martingale in stetiger Zeit

Stets vorgegeben: Filtrierter W-Raum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$, $E = \mathbb{R}^1$.

2.1 Definitionen und elementare Eigenschaften

Definition 2.1.1. Ein stoch. Prozess $X = (X_t)_{t \geq 0}$ heißt *Submartingal* (bzgl. $(\mathcal{F}_t)$), falls

- X an $(\mathcal{F}_t)$ adaptiert
- $\mathbb{R}$-wertig mit $E(|X_t|) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$
- Es gilt die *Submartingal-Ungleichung:*

$$\forall 0 \leq s < t : E(X_t | \mathcal{F}_s) \geq X_s \text{ f.s.} \tag{2.1}$$

X heißt *Supermartingal* , falls $-X$ ein Submartingal ist.
Es heißt *Martingal* , falls es sowohl Sub- als auch Supermartingal ist.

Bemerkungen 2.1.2. Jedes (Sub-)Martingal X bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ ist auch ein (Sub-)Martingal bzgl. der von ihm erzeugten Filtr. $({\mathcal{F}_t}^X)$, sowie bzgl. jeder Filtr. $(\mathcal{G}_t)$ mit ${\mathcal{F}_t}^X \subset \mathcal{G}_t \subset \mathcal{F}_t$.
Ebenso bzgl. der augmentierten Filtration $(\overline{\mathcal{F}_t})$, denn $E(.|\mathcal{F}_t) = E(.|\overline{\mathcal{F}_t})$ f.s.
I.a. ist jedoch für $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$ der Prozess X <u>kein</u> (Sub-)Martingal mehr bzgl. $(\mathcal{G}_t)$.
Die Submartingal-Ungleichung (2.1) bedeutet: $\forall 0 \leq s < t, \forall A \in \mathcal{F}_s$:

$$\int_A X_t dP \geq \int_A X_s dP$$

Beispiel 2.1.3. (trivial)
Sei $\mathcal{F}_t \equiv \mathcal{F} \quad (\forall t \geq 0)$. Dann gilt: (X_t) Submart. $\Leftrightarrow \forall s \leq t : X_t \in L^1$ und $X_s \leq X_t$ f.s.

Faustregel: Martingale Beschreiben faire Spiele,
Supermartingale beschreiben realistische Spiele:
$E(X_t|\mathcal{F}_s)$: was ich aus jetziger Sicht zukünftig erwarten darf
X_s: was ich jetzt habe.

Proposition 2.1.4 (Standardbeispiele)**.** *Sei X die d-dim. BB und $\mathcal{F}_t = {\mathcal{F}_t}^X$. Fr $x, y \in \mathbb{R}^d$ bezeichne $x \cdot y$ das kanonische Skalarprodukt. Dann sind Martingale:*

a) $y \cdot X_t$ *für* $y \in \mathbb{R}^d$*, insbes. die Koordinatenprozesse* X_t^i *für* $i = 1, \ldots, d$.

b) $|X_t|^2 - dt$

c) $\exp(y \cdot X_t - \frac{1}{2}|y|^2 t)$ *für* $y \in \mathbb{R}^d$

Beweis. a) Sei $Y_t = y \cdot X_t$ und $s < t$.
$E(Y_t|\mathcal{F}_s) = y \cdot E(\underbrace{(X_t - X_s)}_{\text{unabhängig von } \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s) + y \cdot E(\underbrace{X_s}_{\text{meßbar bzgl. } \mathcal{F}_s}|\mathcal{F}_s) = y \cdot X_s = Y_s$

b) $E(|X_t|^2|\mathcal{F}_s) = E(|X_t - X_s|^2 + 2X_s \cdot (X_t - X_s) + |X_s|^2|\mathcal{F}_s) = d(t-s) + 0 + |X_s|^2$

c) Sei $Y = \exp(y \cdot X_t - \frac{|y|^2}{2}t)$

$$\begin{aligned} E(Y_t|\mathcal{F}_s) &= e^{-\frac{y^2}{2}t} \cdot E(e^{y(X_t - X_s)} \cdot e^{yX_s}|\mathcal{F}_s) \\ &= e^{-\frac{y^2}{2}t} \cdot e^{y \cdot X_s} \cdot \underbrace{E(e^{y \cdot (X_t - X_s)})}_{e^{y^2/2 \cdot (t-s)}} = Y_s \end{aligned}$$

denn sei Z_t in 0 startende d-dim. BB:

$$\begin{aligned} E(e^{y \cdot Z_t}) &= \int e^{y \cdot z} dP_{Z_t}(dz) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{yz} \cdot (2\pi t)^{-d/2} \cdot e^{-\frac{z^2}{2t}} dz \\ &= e^{\frac{y^2}{2}t} \int_{\mathbb{R}^d} (2\pi t)^{-d/2} \cdot e^{-\frac{(z-yt)^2}{2t}} dz \\ &= e^{\frac{y^2}{2}t} \end{aligned}$$

□

Bemerkung 2.1.5. a) X, Y Mart. $\Rightarrow X + Y, X - Y, \alpha \cdot X$ Mart. $\quad (\forall \alpha \in \mathbb{R})$

b) X, Y Submart. $\Rightarrow X + Y, X \vee Y, \alpha \cdot X$ Submart. $\quad (\forall \alpha \geq 0)$

c) X Mart. und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex (oder X Submart. und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvex und isoton) und $E(|\varphi(X_t)|) < \infty \quad (\forall t \geq 0)$
$\Rightarrow (\varphi(X_t))_{t \geq 0}$ Submart.
(z.B. $(X_t^+)_{t \geq 0}$).

d) X Mart. $\Leftrightarrow X$ Submart. mit $t \mapsto E(X_t)$ konst.

Beweis. a), b) trivial. c) Jensen
d)"$\Leftarrow$" Setze $Z := E(X_t|\mathcal{F}_s) - X_s = E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s)$
$\Rightarrow Z \geq 0$ und $E(Z) = 0 \Rightarrow Z = 0$ f.s.
"$\Rightarrow$" $E(X_t - X_s|\mathcal{F}_s) = 0.$ □

2.2 Maximalungleichungen

Satz 2.2.1. *Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ Submartingal, $T \subset [0,\infty[$ abzählbar (oder X rechtsstetiges Subm, $T = [0,\infty[$) und $X^*(\omega) = \sup_{t\in T} X_t(\omega)$. Dann gilt*

a) $\lambda \cdot P(X^* \geq \lambda) \leq \sup_{t\in T} E(X_t^+)$

b) Ist sogar $X \geq 0$ oder Mart., dann gilt $\forall p > 1$:

$$\|X^*\|_p \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t\in T} \|X_t\|_p$$

Lemma 2.2.2. *Für $a, b \subset \mathbb{R}$ gilt unter obigen Vorr.:*

$$(b-a) \cdot E(U_T(a,b,X(\omega))) \leq \sup_{t\in T} E((X_t - b)^+)$$

Hierbei

$$\begin{aligned} U_T(a,b,X(\omega)) &= \sup\{n \in \mathbb{N}_0 : \exists t_1 < t_2 < \dots < t_{2n} \in T : \\ &\qquad X_{t_1}(\omega) > b, X_{t_2}(\omega) < a, X_{t_3}(\omega) > b, \dots, X_{t_{2n}}(\omega) < a\} \\ &= \textit{Anzahl der absteigenden Überquerungen von } [a,b] \textit{ durch } X_\bullet(\omega)|_T. \end{aligned}$$

Beweis von Satz und Lemma: Aussage bekannt für T endlich. Wähle isotone Folge (T_n) mit T_n endlich, $\bigcup T_n = T$. Die Behauptungen folgen mit Satz v.d. monotonen Konvergenz.

2.3 Regulierungsresultate

Satz 2.3.1. *Sei $(X_t)_t$ ein $(\mathcal{F}_t)_t$-Submartingal mit $X_t \in L^1$ $(\forall t \geq 0)$.*

a) Dann $\exists \Omega^* \in \mathcal{F}, P(\Omega^*) = 1 : \forall \omega \in \Omega^*$:
$\forall t \geq 0$ ex. $X_{t+}(\omega) = \lim_{s\searrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ und
$\forall t > 0$ ex. $X_{t-}(\omega) = \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$.
(Für $\omega \notin \Omega^*$ setze man $X_{t\pm}(\omega) = \limsup X_s(\omega)$.)

b) Dann ist $X_{t+} \in L^1$ und $\forall t \geq 0$:

$$E(X_{t+}|\mathcal{F}_t) \geq X_t \quad f.s. \qquad (*)$$

Dabei gilt Gleichheit in $(*)$, falls $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig ist. Also insbesondere, falls X ein Martingal ist.

c) $(X_{t+})_{t\geq 0}$ *ist ein Subm. bzgl.* $(\mathcal{F}_{t+})$ *(und* $(X_{t-})_{t\geq 0}$ *eines bzgl.* $(\mathcal{F}_{t-})$.*)*
Ist (X_t) *ein Mart., so sind beides Martingale (bzgl. d. jeweiligen Filtr.).*

d) Fast jede Trajektorie von $(Y_t) = (X_{t+})$ *ist* $\underset{\text{cadlag}}{\text{rcll}}$, *d.h.:*

$$Y(\omega) : t \quad \mapsto \quad Y_t(\omega) \ \textit{ist}\ \underset{\substack{(rc)\\(cad)}}{\textit{rechtsstetig}}\ \textit{u. besitzt linke}\ \underset{\substack{(ll)\\(lag)}}{\textit{Limiten}}$$

Beweis. a) Wir zeigen: Für f.a. $\omega \in \Omega$ exisitiert $X_{t-}(\omega)$ $(\forall t)$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ ex. nicht für ein } t > 0\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ ex. nicht für ein } t \in [0,n]\right\} \\
&= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \left\{\omega : \liminf_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \leq a < b \leq \limsup_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} \text{ für ein } t \in [0,n]\right\} \\
&\subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{a,b\in\mathbb{Q}, a<b} \left\{\omega : U_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}(a,b,X(\omega)) = +\infty\right\}.
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
E\left(U_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}(a,b,X(\omega))\right) &\leq \frac{1}{b} \cdot \sup_{t\in[0,n]\cap\mathbb{Q}} E((X_t - b)^+) \\
&= \frac{1}{b} E((X_n - b)^+) < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow P(\{\omega : U\left(U_{[0,n]\cap\mathbb{Q}}(a,b,X(\omega))\right) = +\infty\}) = 0$
$\Rightarrow P(\{\omega : \lim_{s\nearrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega) \text{ ex. nicht für ein } t > 0\}) = 0.$

b) Fix $t \geq 0$ und $(t_n)_{n\in -\mathbb{N}} \in \mathbb{Q}$ mit $t_n \searrow t$ für $n \to -\infty$.
$\Rightarrow (X_{t_n})_{n\in-\mathbb{N}}$ ist ein Submart. bzgl. $(\mathcal{F}_{t_n})_{n\in-\mathbb{N}}$ („rückläufiges Submartingal“) mit

$$\begin{aligned}
\sup_n E(|X_{t_n}|) &\leq 2 \cdot \sup_n EX_{t_n}^+ - \inf_n EX_{t_n} \\
&\leq 2 \cdot EX_{t_{-1}}^+ - EX_t < \infty
\end{aligned}$$

$\Rightarrow X_{t+} \in L^1, X_{t_n} \to X_{t+}$ in L^1 (mit Konvergenzsatz f. rückläufige Submartingale).
Aus $X_t \leq E(X_{t_n}|\mathcal{F}_t)$ folgt daher $X_t \leq E(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$.
Ferner (wegen L^1-Konvergenz) $E(X_{t+}) = \lim_{n\to-\infty} E(X_{t_n})$, und falls $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig, folgt $E(X_t) = E(X_{t+})$.
$\Rightarrow X_t = E(X_{t+}|\mathcal{F}_t)$.

c) Fix $s < t$ und sei s_n eine Folge mit $t > s_n \searrow s$. Dann gilt $X_{s_n} \le E(X_t|\mathcal{F}_{s_n}) \le E(E(X_{t+}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_{s_n}) = E(X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n})$. Ferner $E(X_{t+}|\mathcal{F}_{s_n}) \to E(X_{t+}|\mathcal{F}_{s+})$ (wegen Konvergenzsatz f. rückläufige Submartingale) $\Rightarrow X_{s+} \le E(X_{t+}|\mathcal{F}_{s+})$.

d) Rechtsstetig klar, linke Limiten wegen a), angewandt auf das Subm. (X_{t+}).

□

Korollar 2.3.2. *Sei X rechtsstetiges Subm. bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.*

a) Dann ist es Subm. bzgl. $(\mathcal{F}_{t+})$ und bzgl. dessen Augmentierung.

b) Fast jede Trajektorie ist cadlag.

Korollar 2.3.3. *Sei X (Sub)mart. bzgl. $(\mathcal{F}_t)$, welche übliche Bed. erfüllt, und sei $t \mapsto E(X_t)$ rechtsstetig (z.B. konstant, falls X Martingal). Dann $\exists$ Mod Y von X mit cadlag- Traj. und Y ist (Sub-)Martingal bzgl. $(\mathcal{F}_t)$.*

Beweis. Wähle $Y_t = X_{t+}$ von vorhin. Bleibt zu zeigen: (Y_t) ist Modif. von (X_t), d.h.

$$\forall t \ge 0: \quad P(Y_t = X_t) = 1.$$

Nun gilt aber nach b) aus vorigem Satz:

$$E(X_{t+}|\mathcal{F}_t) = X_t \quad \text{f.s.}$$

und wegen $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+}$:

$$E(X_{t+}|\mathcal{F}_t) = X_{t+} \quad \text{f.s.}$$

□

2.4 Konvergenzsätze

Satz 2.4.1 (Subm.-Konv.)**.** *Sei (X_t) rechtsstetiges Submartingal mit $\sup_t E(X_t^+) < \infty$. Dann $\exists X_\infty := \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s.*

Korollar 2.4.2. *Sei $(X_t)_t$ rechtsstetiges, nicht-neg. Supermart. $\Rightarrow \exists X_\infty = \lim X_t$ f.s.*

Satz 2.4.3. *Sei $(X_t)_t$ rechtsstetiges, nicht-neg. Submart. (oder rechtsstet. Mart.). Dann sind äquivalent:*

ii) $\lim_{t\to\infty} X_t$ existiert in L^1.

iii) $\exists X_\infty \in L^1 : X_\infty = \lim_{t\to\infty} X_t$ f.s. mit $(X_t)_{t\in[0,\infty]}$ ist Submart. (bzw. Mart.) bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,\infty]}$.

i) $\{X_t : t \in [0,\infty[\}$ ist gleichgradig integrierbar.

Bemerkungen 2.4.4. a) Die Auss. sind erfüllt, falls $\sup_t \|X_t\|_p < \infty$ für ein $p > 1$. In diesem Fall $X_\infty \in L^p$ und $X_t \to X_\infty$ in L^p.

b) Die Implik. (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) gelten bereits f. rechtsstet. Submart.

c) Ist X rechtsstet. Mart., so ist ferner äquivalent zu (i), (iii):
(iv) $\exists X_\infty \in L^1 : \forall t \geq 0 : X_t = E(X_\infty | \mathcal{F}_t)$.

d) $\{Y_t : t \in I\}$ gleichgr. integr. $:\Leftrightarrow$
$\sup_{t \in I} E(|Y_t| \cdot 1_{\{|Y_t| > M\}}) \to 0$ für $M \to \infty$.

2.5 Optional Sampling

Satz 2.5.1. *Seien X rechtsst. Submart. bzgl. $(\mathcal{F}_t)$ und S, T beschränkte Stoppzeiten mit $S \leq T$. Dann gilt*

$$E(X_T | \mathcal{F}_S) \geq X_S \quad f.s.$$

Beweis. Sei $t_0 \geq T$ und zunächst $X \geq 0 (\Rightarrow \in L^1)$. Approx. S und T durch Stoppzeiten $S_n, T_n \leq t_0$ mit endlichem Wertebereich, $S_n \searrow S, T_n \searrow T$.
$\Rightarrow X_{S_n} \to X_S, X_{T_n} \to X_T$.
Nun gilt (Doob Lemma): $X_{S_n} \leq E(X_{t_0} | \mathcal{F}_{S_n})$
$\Rightarrow \{X_{S_n} : n \in \mathbb{N}\}$ gleichgr. integr. (denn $\{E(X_{t_0} | \mathcal{F}_{S_n})\}$ ist gleichgr. integr.)
$\Rightarrow X_{S_n} \to X_S$ in L^1, analog $X_{T_n} \to X_T$ in L^1.
Ferner gilt
$\int_A X_{S_n} dP \leq \int_A X_{T_n} dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_{S_n} \Rightarrow \forall A \in \mathcal{F}_S \subset \bigcap_n \mathcal{F}_{S_n}$
$\Rightarrow \int_A X_S dP \leq \int_A X_T dP \quad \forall A \in \mathcal{F}_S$
$\Rightarrow$ Behauptung für $X_t \geq 0$.
$\Rightarrow$ analog: Behauptung für $X_t^{(n)} = X_t \vee (-n)$
$\Rightarrow$ Behauptung für bel. X_t mit monotoner Konvergenz. □

Korollar 2.5.2. *Sei X rechtsst., adaptiert, integr. Äquivalent sind*

i) X ist Submartingal.

ii) $\forall$ beschr. Stoppz. $S \leq T$ gilt: $E(X_S) \leq E(X_T)$. (Bei Mart.: oBdA $S = 0$.)

bzw.

i) X ist Martingal.*

ii) $\forall$ beschr. Stoppzeit T ist $\quad E(X_T) = E(X_0)$.*

Beweis. $i) \Rightarrow ii), i^*) \Rightarrow ii^*)$: Optional sampling.
$ii) \Rightarrow i)$: Sei $s \leq t, A \in \mathcal{F}_s$. Definiere $S := s \cdot 1_A + t \cdot 1_{A^C}$, d.h.
$S(\omega) := \begin{cases} s & , \text{ falls } \omega \in A \\ t & , \text{ sonst.} \end{cases}$
und $T \equiv t \geq s$ Stoppzeiten.

$\Rightarrow E((X_t - X_s) \cdot 1_A) = E(X_T - X_S) \geq 0 \quad \Rightarrow$ Beh.
$ii^*) \Rightarrow i^*)$: Zuerst gilt $\forall$ beschr. Stoppz. $S \leq T$: $E(X_S) = E(X_T) = E(X_0) \Rightarrow$ X und $-X$ sind Submartingale $\Rightarrow X$ Martingal. $\square$

Korollar 2.5.3 (Optional Stopping)**.** *Sei X rechtsstet. (Sub-)Martingal und T Stoppzeit. Dann ist auch $X^T = (X_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ ein (Sub-)Martingal.*

2.6 Anwendung auf BB

Proposition 2.6.1. *Sei (X, P_x) 1-dim BB startend in $x \in]a, b[$ und $T_a = T_{\{a\}}, T_b = T_{\{b\}}$. Dann ist*

a) $E_x(T_a) = E_x(T_b) = +\infty$

b) $E_x(T_a \wedge T_b) = (x - a)(b - x)$

c) $P_x(T_a < T_b) = \frac{b-x}{b-a}, \quad P_x(T_b < T_a) = \frac{x-a}{b-a}$

Beweis. a) folgt aus b) mit $b \nearrow \infty$ bzw. $a \searrow -\infty$, denn $E_x(T_a) \geq E_x(T_a \wedge T_b) = (x - a)(b - x) \to \infty$ für $b \to \infty$.

b) folgt aus nächstem Satz für $d = 1$.

c) Wegen $P_x(T_a = T_b) = 0$ gilt

(1) $P_x(T_a < T_b) + P_x(T_b < T_a) = 1$.
Ferner ist $Y_t = X_{t\wedge T_a\wedge T_b}$ ein beschr. Martingal ($\leq |a| \vee |b|$) $\Rightarrow$ (Optional Sampling).

(2) $x = E_x(Y_0) = E_x(Y_\infty) = E_x(X_{T_a\wedge T_b}) = a \cdot P_x(T_a < T_b) + b \cdot P_x(T_b < T_a)$.

(1)$\wedge$(2) $\Rightarrow x = a \cdot f(x) + b \cdot (1 - f(x))$
$\Rightarrow f(x) = \frac{b-x}{b-a}$.

$\square$

Satz 2.6.2. *Sei X die in x startende d-dim. standard BB (d.h. P = Wiener Maß, $E = \mathbb{R}^d, X_0 = x$), $y \in \mathbb{R}^d, r > |x - y|$. $T_y := T_{\partial B_r(y)} = T^*_{\partial B_r(y)}$. Dann ist*

a) $\mathbb{E}(T_y) = \frac{r^2-|x-y|^2}{d}$ *und*

b) $\nu_{T_x}(\cdot)$ *das zu 1 normierte Oberflächenmaß σ_r auf $\partial B_r(x)$.*

Beweis. b) Sei C eine Borel-Teilmenge von $\partial B_r(0)$ und A eine orthogonale $d \times d$-Matrix. Aufgrund der Rotationsinvarianz der BB gilt:

$$\begin{aligned} \nu_T(C) &= \mathbb{P}(X_T \in C) = \mathbb{P}((A \circ X)_T \in C) \\ &= \mathbb{P}(X_T \in A^{-1}C) = \nu_T(A^{-1}C) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \nu_T$ ist rotationsinvariant und normiert $\Rightarrow$ Beh.
Für jede beschr. oder nicht neg. Borel-Funktion f auf $\mathbb{R}^d$ folgt:

$$\mathbb{E}(f(X_{T_{\partial B_r(0)}})) = \int\limits_{\partial B_r(0)} f(y)\sigma_r(dy)$$

a) Wir zeigen die Behauptung für $y = 0$ (allgemein mit der Translationsinvarianz der BB). Offenbar ist $T := T_{\partial B_r(0)} = T^*_{\partial B_r(0)} < \infty$ wegen iterierten Logarithmus' (z.B.).
Nun ist $M_t := |X_t|^2 - d \cdot t - |x|^2$ Martingal mit $M_0 = 0$.
$\Rightarrow |X_{t\wedge T}|^2 - d \cdot (t \wedge T) - |x|^2$ Martingal
$\Rightarrow d \cdot \mathbb{E}(t \wedge T) = \mathbb{E}(|X_{t\wedge T}|^2) - |x|^2 \leq r^2 - |x|^2 \quad (\forall t)$
$\Rightarrow d \cdot \mathbb{E}(T) \leq r^2 - |x|^2$
Umgekehrt folgt aus dem Lemma von Fatou und der Stetigkeit von X:

$$d \cdot \mathbb{E}(T) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(|X_{t\wedge T}|^2) - |x|^2 \geq \mathbb{E}(\lim_{t\to\infty} |X_{t\wedge T}|^2) - |x|^2 = r^2 - |x|^2$$

$\square$