Institut für angewandte Mathematik
Universität Bonn
Prof. Dr. K.-Th. Sturm
Hendrik Weber
http://www-wt.iam.uni-bonn.de/~sturm/vorlesungSS08/

Übungen zur Vorlesung Stochastische Prozesse

1. Aufgabenblatt vom 11.4.2008

Aufgabe 1- Elementare bedingte Erwartung (10 Punkte)

Sei X eine integrierbare Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{R}$ und Y eine Zufallsvariable mit Werten in $\mathbb{N}$. Man kann dann alternativ zu der Definition in der Vorlesung definieren:

$$\mathbb{E}\big[X\big|Y\big] = \sum_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ \mathbb{P}[Y=n]\neq 0}} \mathbf{1}_{\{Y=n\}} \frac{\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{Y=n\}}X]}{\mathbb{P}[Y=n]}$$

Bezeichne mit $\mathcal{F}$ die von Y erzeugte Sigma-Algebra. Zeige dann die folgenden Eigenschaften

a) Die Zufallsvariable $\mathbb{E}\big[X\big|Y\big]$ ist $\mathcal{F}$- messbar.

b) $\mathbb{E}\big[X\big|Y\big]$ ist integrierbar und für jedes $\mathcal{F}$-messbare Ereigniss A gilt $\mathbb{E}\Big[\mathbf{1}_A\mathbb{E}\big[X\big|Y\big]\Big] = \mathbb{E}\Big[X\mathbf{1}_A\Big]$.

Die beiden Definitionen stimmen also überein.

Aufgabe 2- Monotonie der bedingten Erwartung (10 Punkte)

Seien X und Y integrierbare (oder positive) Zufallsvariablen auf demselben Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $\mathcal{F}$ eine Untersigmaalgebra von $\mathcal{A}$. Zeige die folgende Monotonieeigenschaft:

$$X \geq Y \quad \text{f.s} \Rightarrow \mathbb{E}[X|\mathcal{F}] \geq \mathbb{E}[Y|\mathcal{F}] \quad \text{f.s..}$$

Aufgabe 3 - Bedingen gaußscher Zufallsvariablen (10 Punkte)

Die gemeinsame Verteilung eines unbeobachteten Signals X und eines Beobachtungswerts Y sei eine zweidimensionale Normalverteilung mit Mittelwert $m = (m_X, m_Y)$ und Kovarianzmatrix

$$V \;=\; \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}.$$

Berechne den Prognosewert $\mathbb{E}[X|Y]$ für das Signal X gegeben die Beobachtung Y, sowie den mittleren quadratischen Prognosefehler $\mathrm{Var}\,(X|Y)$.
Hinweis: $\mathrm{Var}\,(X|Y) = \mathbb{E}[X^2|Y] - \mathbb{E}[X|Y]^2$.

Aufgabe 4 - Permutationen (10 Punkte)

Sei $d \in \mathbb{N}$ beliebig. Betrachte das Mengensystem $\mathcal{F}$ aller messbaren Teilmengen A mit folgender Eigenschaft: Für alle Permutationen σ von $\{1, \ldots, d\}$ gilt

$$(x_1, \ldots .x_d) \in A \Rightarrow (x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) \in A.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{F}$ eine Untersigmaalgebra von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ist.

b) Sei nun μ ein beliebiges Wahscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$. Versehe den Produktraum $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ mit dem Produktmaß $\mu^{\otimes d}$. Dann gilt für jede Zufallsvariable X auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \mu^{\otimes d})$

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{F}] = \frac{1}{d!}\sum_{\sigma} X(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(d)}) \qquad \text{f.s.,}$$

wobei die Summe über alle Permutionen reicht.