SS 2004 **Blatt 1** 22.4.2004

Dozent: Karl-Theodor Sturm Assistent: Atle Hahn

Analysis II

Aufgabe 1. Bestimme jeweils eine Stammfunktion von

i) $f(x) = \frac{\sin(x)}{3+\cos(x)}$

ii) $f(x) = (\tan x)^3, \quad x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

iii) $f(x) = (\ln(x)+1)x^x, \quad x \in]0, \infty[$

Aufgabe 2. Sei $\alpha \geq 0$.

i) Bestimme eine Stammfunktion von $f(x) = \frac{1}{x \ln(x)^\alpha}, \quad x \in]0, \infty[$

ii) Zeige: Die Reihe $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n \ln(n)^\alpha}$ konvergiert genau dann, wenn $\alpha > 1$ ist.

Aufgabe 3. Die Funktion $L : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ sei durch

$$L(x) := \int_1^x \frac{1}{t} \, dt$$

definiert. Zeige ohne Benutzung des Logarithmus:

i) $L(xy) = L(x) + L(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad L'(1) = 1$

ii) L wächst streng monoton und ist konkav.

Aufgabe 4. Sei $s \in \mathbb{R}$. Zeige: Das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x^s} dx$ existiert (oder "konvergiert") genau dann, wenn $s > 0$ ist. Ist $s > 1$, so konvergiert das Integral sogar "absolut", d.h. dann existiert sogar das uneigentliche Integral $\int_1^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x^s}\right| dx$