**Institut für angewandte Mathematik**
**Wintersemester 10/11**
Karl-Theodor Sturm, Matthias Erbar, Christian Ketterer

# 1. Übungsblatt „Grundzüge der Stoch. Analysis"

**Abgabe bis Fr 21.10., 10 Uhr, Postfach im Schließfachraum (LWK)**

---

**1. (Martingaldefinition).** $X_1$ und $Y_1$ seien unabhängige, beide gemäß $\mathbb{P} := \frac{1}{2}(\delta_{\{-1\}} + \delta_{\{1\}})$ binomial verteilte Zufallsvariablen. Mit diesen werde eine weitere Zufallsvariable $Z$ per

$$Z := \begin{cases} +1, & \text{falls } X_1 + Y_1 = 0 \\ -1, & \text{falls } X_1 + Y_1 \neq 0 \end{cases}$$

definiert. Ferner setze man $X_2 := X_1 + Z$ sowie $Y_2 := Y_1 + Z$. Man zeige: $(X_i)_{i=1,2}$ und $(Y_i)_{i=1,2}$ sind Martingale, jedoch ist $(X_i + Y_i)_{i=1,2}$ kein Martingal. Wann ist die Summe von Martingalen wieder ein Martingal?

**2. (Stoppsatz).** Sei $(X_n)_{n\geq 0}$ ein (Super-)Martingal und $T$ eine Stoppzeit mit $T < \infty$ f.s. Zeige, dass $\mathbb{E}[X_T] = \mathbb{E}[X_0]$ (bzw. $\mathbb{E}[X_T] \leq \mathbb{E}[X_0]$), falls :

a) $X$ beschränkt ist, d.h. es ex. $M > 0$ mit $|X_n| \leq M$ f.s. $\forall n$.

b) $\mathbb{E}[T] < \infty$ und $X$ beschränkte Inkremente hat, d.h. es ex. $M > 0$ mit $|X_{n+1} - X_n| \leq M$ f.s. $\forall n$.

c) Unter welchen anderen Voraussetzungen kann man die Aussage folgern?

**3. (Martingaltransformation und -zerlegung).**

a) Seien $X = (X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal und $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ ein vorhersagbarer Prozeß mit $X_n, Z_n \in L^2$ für alle $n \geq 0$. Sei ferner $Y := Z \cdot X$. Berechne $\mathbb{E}[Y_n]$ und zeige die $L^2$-Isometrie

$$\mathbb{E}Y_n^2 = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{n} Z_k^2 |X_k - X_{k-1}|^2\Big], \qquad n \in \mathbb{N} .$$

b) Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Martingal. Zeige: es existiert ein wachsender vorhersagbarer Prozeß $A = (A_n)_{n\geq 0}$, sodass $(e^{X_n - A_n})_{n\geq 0}$ ein Martingal ist. Berechne $A$.

**4. (Galton–Watson–Prozeß).** Seien $\xi_i^{(n)}$, $i, n \geq 0$, i.i.d. Zuffalsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Man definiere den Galton–Watson–Prozeß, wie folgt:

$$X_0 := 1, \qquad X_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{(n)} + \cdots + \xi_{X_n}^{(n)}, & \text{falls } X_n > 0, \\ 0, & \text{falls } X_n = 0, \end{cases} \qquad n \in \mathbb{N}_0 .$$

$X_n$ beschreibt die Anzahl der Individuen einer Population in der $n$-ten Generation; $\xi_i^{(n)}$ ist die Anzahl der Nachkommen des $i$-ten Individuums in der $n$-ten Generation. Seien weiter $\mathcal{F}_n := \sigma(\xi_i^{(m)};\, 0 \leq m \leq n-1)$ und $\mu := \mathbb{E}\xi_i^{(m)}$.

a) Zeige, dass $(\mu^{-n}X_n)_{n\geq 0}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ ist.

b) Wir nehmen nun $\mu < 1$ an. Zeige: es ex. $n_0 = n_0(\omega)$, sodass $X_n = 0\ \forall n \geq n_0$ f.s. Insbesondere gilt also $\mu^{-n}X_n \to 0$ f.s.

*c) Kommentiere den Durschnittswert von $1,36$ Kindern pro Frau in der Bundesrepublik.