Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
9. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 17.12.2021, 0:00

Information der Fachschaft: Dieses Jahr findet die Mathe-Weihnachtsfeier virtuell am Dienstag, den 21.12., ab 18 c.t. statt. Alle aktuellen Informationen und eine Anmeldung sind auf unserer **Website** zu finden. Schaut vorbei!

Information zur Vorlesung: Die Vorlesung am Dienstag, den 21.12., findet ausnahmsweise nur digital statt. Dies folgt einer Empfehlung des Prüfungsausschusses.

Aufgabe 1 [*6 Pkt*]

Es sei $(X_n)_{n\geq 2}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n \log n} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n \log n}.$$

Zeigen Sie: Die Folge genügt zwar dem schwachen, aber nicht dem starken Gesetz der großen Zahlen in dem Sinne, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=2}^{n} (X_i - \mathbb{E}(X_i))$$

zwar in Wahrscheinlichkeit gegen Null konvergiert, aber nicht fast sicher.

Aufgabe 2 [*5 Pkt*]

Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parameter α (d.h. $\mathbb{P}(X_n \geq s) = e^{-\alpha s}$ für $s \geq 0$). Beweisen Sie, dass

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln n} = \frac{1}{\alpha} \quad \text{fast sicher.}$$

Aufgabe 3 [*3+3 Pkt*]

Sei $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die jeweils die Werte 0 und 1 mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ annehmen. Wir definieren die Partialsumme $X^{(n)}$ wie folgt:

$$X^{(n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{2}{3^i} X_i, \quad n \in \mathbb{N}.$$

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_n von $X^{(n)}$.
2. Zeigen Sie, dass die Verteilung der Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3^i} X_i$ die Cantorfunktion ist.

Aufgabe 4 *[3 Pkt]*

Die Dichte der Cauchy Verteilung mit Parameter $u > 0$ ist gegeben durch

$$c_u(x) = \frac{u}{\pi(u^2 + x^2)}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichte c_u. Zeigen Sie, dass das starke Gesetz der großen Zahlen für diese Folge nicht gilt, indem Sie zeigen, dass

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$$

nicht fast sicher gegen eine deterministische Zufallsvariable konvergiert.

Hinweis und Tipp: Sie können ohne Beweis verwenden, dass für $a, b > 0$ und $x \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{(y^2 + a^2)((y - x)^2 + b^2)} = \frac{\pi(a + b)}{ab\,(x^2 + (a + b)^2)}$$

gilt. Damit könnte man Faltungsstabilität zeigen.