Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
8. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 10.12.2021, 0:00

Aufgabe 1 *[4 Pkt]*

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$ mit $\int_{\mathbb{R}} |x| dP(x) < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \cos(xt) dP(x) = - \int_{\mathbb{R}} x \sin(xt) dP(x).$$

Hinweis: Wenn Sie Satz 6.3 aus der Vorlesung anwenden möchten, dann müssen Sie ihn zunächst beweisen.

Aufgabe 2 *[3+2 Pkt]*

1. Es seien X und Y unabhängige, standard Gauss-verteilte (d.h. $\mathcal{N}(0,1)$) Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable

$$Z = \begin{cases} \frac{X}{Y} & : Y \neq 0 \\ 0 & : Y = 0 \end{cases}$$

   Cauchy verteilt ist mit Parameter 1.

2. Es sei U eine auf $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ gleichverteilte Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass $\tan(U)$ Cauchy verteilt ist mit Parameter 1.

Aufgabe 3 *[3+2 Pkt]*

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, X_1, X_2, \ldots : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}^k, \mathcal{B}^k), k \in \mathbb{N}$ messbar. Man sagt, dass die Folge (X_n) in Wahrscheinlichkeit gegen X konvergiert und schreibt $X_n \xrightarrow{P} X$, falls für jedes $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(\|X_n - X\| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{für } n \to \infty,$$

wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm auf $\mathbb{R}^k$ ist. Beweisen Sie:

1. Sei $c \in \mathbb{R}^k$ und $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^m$ stetig an der Stelle c. Gilt $X_n \xrightarrow{P} c$, so gilt auch $f(X_n) \xrightarrow{P} f(c)$.

2. Es seien $X_n = (X_n^1, \ldots, X_n^k)$ und $X = (X^1, \ldots, X^k)$. Die Aussage $(X_n^1, \ldots, X_n^k) \xrightarrow{P} (X^1, \ldots, X^k)$ gilt genau dann, wenn $X_n^i \xrightarrow{P} X^i$ für alle $i \in \{1, \ldots, k\}$.

Bemerkung: Aussage 1 bleibt erfüllt, wenn man c durch einen Zufallsvektor X ersetzt und die Menge der Unstetigkeitsstellen der Funktion f eine P_X-Nullmenge darstellt.

Aufgabe 4 [*3+2+1 Pkt*]

Es seien $X, X_1, X_2, \ldots$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie:

1. Aus $X_n \xrightarrow{P} X$ folgt $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, d.h. Konvergenz in Wahrscheinlichkeit impliziert Konvergenz in Verteilung.

2. Ist X P-f.s. konstant, so gilt auch die Umkehrung: $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ impliziert $X_n \xrightarrow{P} X$.

3. Aus $(X_n - X)^2 \xrightarrow{P} 0$ folgt $X_n \xrightarrow{P} X$.