Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
3. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 05.11.2021, 0:00

Aufgabe 1 *[2+2 Pkt]*

1. Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reellwertige Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass die beiden Abbildungen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} X_n \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} X_n$$

   messbar sind.

2. Sei X eine Zufallsvariable mit Verteilungfunktion F_X und $a, b \in \mathbb{R}$. Man bestimme die Verteilungsfunktionen der folgenden Zufallsvariablen:

$$Y_1 = aX + b, \qquad Y_2 = |X|, \qquad Y_3 = e^X.$$

Aufgabe 2 *[2+1+2+1 Pkt]*

Es sei (A_n) eine Folge von Teilmengen einer beliebigen nichtleeren Menge Ω. Der *obere* und der *untere Limes* der Mengenfolge (A_n) werden definiert durch

$$\limsup_n A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \quad \text{bzw.} \quad \liminf_n A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Stimmen beide Mengen überein, so schreibt man

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \limsup_n A_n = \liminf_n A_n.$$

Zeigen Sie:

1. Mit dem Ereignis $\liminf_n A_n$ tritt auch das Ereignis $\limsup_n A_n$ ein, d.h. es gilt

$$\liminf_n A_n \subseteq \limsup_n A_n.$$

   Geben Sie ein Beispiel für strikte Inklusion an,

2. $\limsup_n A_n^c = \left(\liminf_n A_n\right)^c$,

3. $\limsup_n (A_n \cap B_n) \subset (\limsup_n A_n \cap \limsup_n B_n)$; geben Sie ein Beispiel für strikte Inklusion an,

4. Für *monotone* Mengenfolgen (d.h. $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$ oder $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots$) sind der obere und der untere Limes gleich.

Aufgabe 3 *[2 Pkt]*

Sei λ das Lebesgue-Maß auf $[0,1]$. Betrachten Sie den zugehörigen Wahrscheinlichkeitsraum $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Wir konstruieren eine Folge $\{C_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von abgeschlossenen Mengen nach folgendem Muster:

$$\begin{aligned} C_1 &= \left[0, \frac{1}{3}\right] \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right] \\ C_2 &= \left[0, \frac{1}{9}\right] \cup \left[\frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right] \cup \left[\frac{6}{9}, \frac{7}{9}\right] \cup \left[\frac{8}{9}, 1\right] \end{aligned}$$

Die Menge C_n ist die Vereinigung von 2^n disjunkten, abgeschlossenen Intervallen der Länge 3^{-n}. Die Menge C_{n+1} konstruieren wir aus der Menge C_n, indem wir das mittlere Drittel jedes Intervals aus C_n entfernen.
Sei $C = \cap_{n=1}^{\infty} C_n$. Man nennt C die *Cantormenge*. Zeigen Sie, dass die Cantormenge eine nichtleere, abgeschlossene Menge vom Lebesgue-Maß 0 ist.

Aufgabe 4 *[Freiwillige Aufgabe, 3+2+2+1 Pkt]*

Sei $(C_n)_n$ die selbe Mengenfolge wie in der vorigen Aufgabe. Für alle $n \in \mathbb{N}$ definieren wir eine nichtfallende, stetige Funktion F_n auf $[0,1]$ wie folgt:

1. $F_n(0) = 0$ und $F_n(1) = 1$;

2. Die Funktion F_n ist in jedem Teilintervall von $[0,1] \setminus C_n$ konstant und nimmt die Werte $\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}, \ldots, \frac{2^n-1}{2^n}$ in aufsteigender Reihenfolge an.

3. In allen Intervallen von C_n ist F_n linear.

Zeigen Sie:

(i) Die Funktionenfolge F_n konvergiert gleichmäßig gegen eine Funktion F.

(ii) F ist eine stetige Verteilungsfunktion auf $[0,1]$.

(iii) Das durch F eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß hat keine Dichte.

(iv) Das durch F eindeutig bestimmte Wahrscheinlichkeitsmaß hat keine Atome.

Hinweise:

- Betrachten Sie den vollständigen, normierten Raum $C([0,1])$ der stetigen Funktionen auf $[0,1]$ mit der Norm $\|f\|_\infty = \max_{0\le x\le 1} |f(x)|$.
- Ein Atom ist ein Punkt mit positivem Maß.