Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
2. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 29.10.2021, 0:00

Aufgabe 1 *[4 Pkt]*

Sei $\Omega = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$. Zeigen Sie, dass keine Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1]$ existiert (wobei $\mathcal{P}(\Omega)$ die Potenzmenge von Ω bezeichnet) mit folgenden Eigenschaften:

(a) (Normierung) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(b) (σ-Additivität) falls $A_1, A_2, \ldots \subset \Omega$ paarweise disjunkt sind, dann gilt

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i),$$

(c) für alle $A \subset \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$, gilt $\mathbb{P}(T_n A) = \mathbb{P}(A)$, wobei $T_n A = \{T_n \sigma : \sigma \in A\}$, mit

$$(T_n \sigma)_i = \begin{cases} \sigma_i, & i \neq n, \\ -\sigma_n, & i = n. \end{cases}$$

Tipp: Zerlegen Sie Ω in Äquivalenzklassen $\sigma \sim \sigma'$, falls $|\{i \in \mathbb{N} : \sigma_i \neq \sigma'_i\}| < \infty$, und benutzen Sie das Auswahlaxiom.

Aufgabe 2 *[2 Pkt]*

Seien A und B Teilmengen von Ω. Bestimmen Sie $\sigma(\{A, B\})$, d.h. die kleinste σ-Algebra über der Menge Ω, in der die Mengen A und B enthalten sind.

Aufgabe 3 *[2+2 Pkt]*

Es sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge, und seien $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ σ-Algebren auf einer Menge Ω.

1. Beweisen Sie, dass $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{F}_i = \{A : A \in \mathcal{F}_i \text{ für alle } i \in \mathcal{I}\}$ eine σ-Algebra ist.

2. Zeigen Sie, dass die Vereinigung zweier σ-Algebren auf derselben Menge Ω im Allgemeinen keine σ-Algebra ist.

Aufgabe 4 *[3 Pkt]*

Sei X eine reelle Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F(x) = \mathbb{P}[X \leq x]$. Zeigen Sie, dass F genau dann in einem Punkt $x \in \mathbb{R}$ stetig ist, wenn $\mathbb{P}[X = x] = 0$.

Aufgabe 5 *[3+2+2 Pkt]*

1. Zeigen Sie, dass jede nichtfallende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ höchstens abzählbar viele Unstetigkeitstellen besitzt.

2. Zeigen Sie, dass jede nichtfallende Funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine *rechtsstetige Modifikation* besitzt, d.h. es existiert eine nichtfallende rechtsstetige Funktion $\widetilde{F}$, die sich an höchstens abzählbar vielen Stellen von F unterscheidet.

3. Es sei D eine dichte Teilmenge von $\mathbb{R}$ und sei $F : D \to \mathbb{R}$ eine nichtfallende Funktion mit
$$F(x) = F(x+) = \lim_{y \in D, y \downarrow x} F(y).$$
Zeigen Sie, dass es genau eine nichtfallende rechtsstetige *Fortsetzung von F auf* $\mathbb{R}$ gibt. Dabei wird eine Funktion $\widehat{F} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Fortsetzung von F genannt, falls $\widehat{F}(x) = F(x)$ für alle $x \in D$ gilt.

Hinweis zu 1.: Beweisen Sie zuerst, dass $F(x-) = \lim_{y \uparrow x} F(y)$ und $F(x+) = \lim_{y \downarrow x} F(y)$ für jedes $x \in \mathbb{R}$ existieren und betrachten Sie dann Intervalle $I(x) = \big(F(x-), F(x+)\big)$.