Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
13. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 28.01.2022, 0:00

Information zur Konferenz **Graduate Research Opportunities for Women at Bonn (GROW@Bonn)**, vom 31. März bis 2. April 2022:

Ihr bekommt geboten:

- Unterhaltsame 45-minütige Forschungsvorträge von Prof. Ulrike Tillmann, Dr. Commelin, Prof. Disertori, Dr. Duarte, Prof. Fintzen, Prof. Scholze, Prof. Zagier.
- 3 verschiedene Podiumsdiskussionen in hochkarätiger Besetzung über Karrierewege in der Mathematik.
- Erkundet Bonn mit ortskundigen Mathematiker:innen und Mathematikstudierenden
- Networking mit Mathematiker:innen aus Bonn
- Mittagsrunde am Freitag in der Mensa mit Mathematiker:innen aus der Region!

Aufgabe 1

Sei $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Bernoulli Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(\beta_n = 1) = p, \quad \mathbb{P}(\beta_n = 0) = q, \text{ wobei } p + q = 1 \text{ für } n = 1, 2, \dots$$

1. Für $n = 2, 3, \dots$ definieren wir den stochastischen Prozess X_n durch

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 1 \\ 1, & \text{falls } \beta_{n-1} = 1, \beta_n = 0 \\ 2, & \text{falls } \beta_{n-1} = 0, \beta_n = 1 \\ 3, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 0 \end{cases}$$

   (a) Beweisen Sie, dass der Prozess $\{X_n, n = 2, 3, \dots\}$ eine Markovkette ist.

   (b) Berechnen Sie die Übergangsmatrix P.

   (c) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $p_3(0, 0)$.

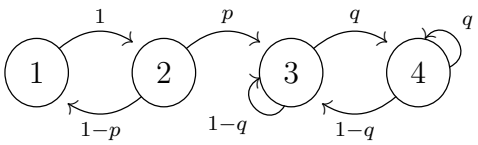
2. Für $n = 2, 3, \dots$ definieren wir den stochastischen Prozess X_n durch

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } \beta_{n-1} = \beta_n = 1 \\ 1, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass der Prozess $\{X_n, n = 2, 3, \dots\}$ keine Markovkette ist.

Aufgabe 2

Sei die folgende Markovkette gegeben:



Geben Sie in Abhängigkeit von $p, q \in [0, 1]$ die wesentlichen und unwesentlichen Klassen der Markovkette an und diskutieren Sie die Existenz und Eindeutigkeit invarianter Verteilungen.