Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
12. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 21.01.2022, 0:00

Aufgabe 1 [*5 Pkt*]

Es seien $s \geq 0$ und $\lambda > 0$. Beweisen Sie:

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\lambda n} \sum_{0\leq k\leq ns} \frac{(\lambda n)^k}{k!} = \begin{cases} 1 & : \ s > \lambda, \\ 1/2 & : \ s = \lambda, \\ 0 & : \ s < \lambda. \end{cases}$$

Tipp: Faltungsabgeschlossenheit der Poissonverteilung.

Aufgabe 2 [*2+2 Pkt*]

In einer Meeresfarm werden Muscheln zur Perlengewinnung gezüchtet. Allerdings bringt durchschnittlich nur jede fünfzigste Muschel eine Perle hervor.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist unter 100 Muscheln keine Perle zu finden?
2. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass 100 Muscheln mindestens zwei Perlen enthalten?

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten zunächst exakt. Überprufen Sie dann, wie gut sich diese Werte mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes und mit Hilfe der Poissonapproximation der Binomialverteilung annähern lassen.

Hinweis: Für die Berechnung der exakten Wahrscheinlichkeit benötigen Sie eine entsprechende Binomial-Tabelle, für die Approximationen mit der Normalverteilung sollten Sie lediglich auf eine Tabelle mit Werten der Standardnormalverteilung zurückgreifen.

Aufgabe 3 [*6 Pkt*]

Es seien N weiße und N schwarze Kugeln auf zwei Urnen verteilt, so dass in jeder Urne N Kugeln enthalten sind. Der Zustand des Systems zum Zeitpunkt n wird beschrieben durch eine Zufallsvariable X_n, die die Anzahl der weißen Kugeln in der ersten Urne angibt. Bei jedem Schritt wird zufällig je eine Kugel aus jeder Urne gezogen und die beiden Kugeln werden vertauscht. Dann ist X_n eine Markovkette mit Zustandsraum $\{0, \ldots, N\}$. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette.

Aufgabe 4 [*3+2 Pkt*]

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine stationäre Markovkette mit endlichem Zustandraum $\mathcal{S}$ und Übergangsmatrix P. Wir definieren die n-Schritt-Übergangsmatrix durch $P_n = \big(p_n(i,j)\big)_{i,j\in\mathcal{S}}$, wobei $p_n(i,j) = \mathbb{P}(X_n = j | X_0 = i)$.

1. Beweisen Sie die **Chapman-Kolmogorov** Gleichungen:

$$p_{n+m}(i,j) = \sum_{k\in\mathcal{S}} p_m(i,k)p_n(k,j) \text{ für } n,m \in \mathbb{N}.$$

2. Zeigen Sie, dass $P_n = P^n$, wobei hier P^n die $n-$te Potenz von P bezeichnet.