Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
11. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 14.01.2022, 0:00

Aufgabe 1 *[5 Pkt]*

Eine Münze wird wiederholt unabhängig geworfen. Dabei ist die Wahrscheinlichkeitkeit für Kopf bei jedem Wurf gleich $p \in [0,1]$. Seien H_n und T_n die Anzahl von Kopf bzw. Zahl in n Würfen. Zeigen Sie, dass für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\mathbb{P}\left(2p - 1 - \epsilon \leq \frac{1}{n}(H_n - T_n) \leq 2p - 1 + \epsilon\right) \to 1, \text{ wenn } n \to \infty.$$

Aufgabe 2 *[5 Pkt]*

Gegeben sei das Produktmodell $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}^n, P_\lambda^{\otimes n} : \lambda > 0)$, wobei P_λ die Exponentialverteilung mit Parameter λ ist. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood Schätzer für λ und zeigen Sie, dass dieser konsistent ist (d.h. dass er gegen λ in Wahrscheinlichkeit konvergiert).

Aufgabe 3 *[5 Pkt]*

Seien X und Y zwei Zufallsvariablen auf $\mathbb{R}$ mit charakteristischen Funktionen ϕ_1 und ϕ_2. Die gemeinsame Verteilung von (X, Y) sei gegeben durch $dP_{X,Y}(x, y) = p(x, y)\, dx\, dy$, wobei

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}[1 + xy(x^2 - y^2)], & \text{falls } |x| \leq 1 \text{ und } |y| \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die charakteristische Funktion ϕ von $X + Y$ durch

$$\phi(t) = \phi_1(t)\phi_2(t),$$

gegeben ist, aber dass X und Y keine unabhängigen Zufallsvariablen sind.

Aufgabe 4 *[5 Pkt]*

Es seien X und Y unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Zeigen Sie mit Hilfe der charakteristischen Funktionen: Stimmt die Verteilung der Zufallsvariablen $(X + Y)/\sqrt{2}$ mit der von X und Y überein, dann sind X und Y normal verteilt.

Tipp: Aus den Voraussetzungen erhält man für die charakteristische Funktion eine Gleichung der Form $\phi(t) = [\phi(f)]^2$ für eine Funktion f. Betrachten Sie Iterationen dieser Gleichung zusammen mit der Taylorentwicklung von ϕ.