Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
10. Übungsblatt

Abgabe über ecampus bis Freitag, 07.01.2022, 0:00

Dieser Zettel gibt einen kleinen Vorgeschmack auf die Klausur. Ihr solltet daher versuchen, die Aufgaben zunächst alleine zu lösen.

Aufgabe 1 [*2+2 Pkt*]

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

a) Es seien X, Y und Z unabhängige Zufallsvariablen. Sei $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ sowohl die Verteilungsfunktion von X als auch die Verteilungsfunktion von Y, und sei Z Bernoulliverteilt. Bestimmen Sie die Verteilung von $(1-Z)X + ZY$.

b) Sei $A \in \mathcal{F}$ mit $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\}$ gegeben. Zeigen Sie, dass A und ein beliebiges $B \in \mathcal{F}$ unabhängig sind.

Aufgabe 2 [*5 Pkt*]

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge identisch verteilter Zufallsvariablen mit $E[X_1^2] < \infty$. Zeigen Sie, dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\max\{|X_i| : i \in \{1,\dots,n\}\}}{\sqrt{n}} \longrightarrow 0 \quad \text{in Wahrscheinlichkeit.}$$

Aufgabe 3 [*2+2 Pkt*]

Sei eine Funktion $f(x)$ durch ihre Taylor-Reihe gegeben:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Es gelte, dass

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n < \infty, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Sei P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathbb{R}$, sodass

$$\mathbb{E}_P\left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n\right) < \infty.$$

1. Zeigen Sie, dass dann
$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dP(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbb{E}_P(x^n).$$

2. Beweisen Sie, dass
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \cos(xt)dx = e^{-t^2/2},$$
und somit auch
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} e^{ixt} dx = e^{-t^2/2}.$$

Aufgabe 4 *[4 Pkt]*

Beweisen Sie mit Hilfe von charakteristischen Funktionen das schwache Gesetz der großen Zahlen in der folgenden Form: Ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(|X_1|) < \infty$, dann konvergiert $n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$ für $n \to \infty$ in Wahrscheinlichkeit gegen $\mathbb{E}(X_1)$.

Aufgabe 5 *[3 Pkt]*

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\lambda > 0$. Zeigen Sie, dass für eine Poisson verteilte Zufallsvariable $Y_{n\cdot\lambda}$ mit Parameter $n \cdot \lambda$ gilt:
$$\frac{Y_{n\cdot\lambda} - n \cdot \lambda}{\sqrt{n \cdot \lambda}} \xrightarrow{d} X, \quad \text{für } n \to \infty,$$
wobei X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Wir wünschen euch frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins neue Jahr!