Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
1. Übungsblatt

Ohne Abgabe, Besprechung in den Tutorien ab dem 25.10.2021

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeigen Sie, dass

1. Für A, $B \in \mathcal{F}$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$.
2. Falls $A \in \mathcal{F}$ und (A_n) eine Folge von (nicht notwendigerweise disjunkten) Megen in $\mathcal{F}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ ist, so gilt

$$\mathbb{P}[A] \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_n].$$

Bemerkung: Die Eigenschaft in Punkt 2. wird *Subadditivität* eines Wahrscheinlichkeitsmaßes genannt.

Aufgabe 2

Es sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

1. Sei $(A_n)_n$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$ so dass $A_n \uparrow A$, d.h. $A_n \subseteq A_{n+1}$ und $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[A] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$.
2. Sei $(B_n)_n$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$ so dass $B_n \downarrow B$, d.h. $B_{n+1} \subseteq B_n$ und $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Zeigen Sie, dass $\mathbb{P}[B] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[B_n]$

Aufgabe 3

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie das sog. *Einschluss-Ausschluss-Prinzip*

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i<j\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i<j<k\leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1}\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n).$$

Aufgabe 4

Sei Ω eine endliche Menge und $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass eine einzige Partition $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ von Ω existiert, so dass (i) alle $\pi_i \in \mathcal{A}$, und (ii) für alle $B \in \mathcal{A}$ und für alle $\ell \in \{1, \ldots, n\}$: $\pi_\ell \cap B \in \{\emptyset, \pi_\ell\}$.

   Bemerkung: Man nennt $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ eine Partition von Ω, falls $\pi_i \neq \emptyset$ für alle i, $\Omega = \cup_{i=1}^n \pi_i$ und $\pi_i \cap \pi_j = \emptyset$, falls $i \neq j$.

2. Zeigen Sie, dass es für alle $B \in \mathcal{A}$ ein $J_B \subset \{1, \ldots, n\}$ gibt, sodass $B = \cup_{j \in J_B} \pi_j$. Folgern Sie, dass $\mathcal{A}$ die von $(\pi_1, \ldots, \pi_n)$ erzeugte σ-Algebra ist, d.h. dass $\mathcal{A} = \sigma(\pi_1, \ldots, \pi_n)$.

3. Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß über $(\Omega, \mathcal{A})$ und $p_k := \mathbb{P}(\pi_k)$. Zeigen Sie, dass $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Umgekehrt, seien p_k, $k = 1, \ldots, n$, mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^n p_k = 1$. Zeigen Sie, dass dann ein einziges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ über $(\Omega, \mathcal{A})$ existiert so dass $\mathbb{P}(\pi_k) = p_k$.

Bemerkung: Die Elemente $\pi_1, \ldots, \pi_n$ nennt man auch *Atome*.