Institut für Angewandte Mathematik
WS 2021/22
Prof. Dr. Anton Bovier,
Florian Kreten

Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie
0. Übungsblatt

Ohne Abgabe, Besprechung in den Tutorien ab dem 18.10.2021

Informationen zum Übungsbetrieb

Im Oktober können wir leider nur Online-Tutorien zu den Zeiten **Mo 8, Di 10, Fr 8** anbieten. Diese könnt ihr nach Belieben besuchen. Die Zugangsdaten findet ihr auf **ecampus**.

Meldet euch dennoch jetzt für eine der sechs möglichen Übungsgruppen an, die ab November stattfinden. Beachtet, dass jede Gruppe maximal 20 Studenten aufnehmen kann. Die Vorbesprechung für das reguläre Online-Tutorium ist am 12.10. um 14 Uhr per **Zoom**.

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{A}$ eine Menge von Teilmengen von Ω, so dass für alle $A, B \in \mathcal{A}$, auch $A^c \in \mathcal{A}$ und $A \cup B \in \mathcal{A}$.

1. Zeigen Sie, dass
$$A \cap B \in \mathcal{A} \quad A \setminus B \in \mathcal{A}.$$
2. Zeigen Sie, dass die Menge $\mathcal{A}$ mit den Operationen $\cap$, $\cup$ eine Boolesche Algebra bildet.
3. Zeigen Sie, dass für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt
$$\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \cdot \mathbb{1}_B \quad \text{und} \quad \mathbb{1}_{A\cup B} = \mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{A\cap B}.$$

Aufgabe 2

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und sei $f_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ die Abbildung der Frequenzen der Ausgänge eines Spiels:
$$f_k(A) \equiv \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mathbb{1}_{\omega_i \in A},$$
wobei ω_i der Ausgang des i-ten Spiels ist, und $A \in \mathcal{A}$. Zeigen Sie, dass für eine gegebene Folge $\{\omega_i\}_{i=1,\dots,k}$ die Abbildung $f_k : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Aufgabe 3

Ist es wahrscheinlicher bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine Sechs zu werfen oder bei 24 Würfen mit jeweils zwei Würfeln mindestens eine Doppelsechs zu erhalten? Geben Sie **jeweils** einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ an.

Aufgabe 4

Spieler A und B vereinbaren ein faires Spiel über 7 Runden. Jeder Spieler zahlt zu Beginn 5 Euro als Einsatz, wer mindestens vier Runden gewinnt erhält die gesamten 10 Euro. Nach fünf Runden muss das Spiel beim Stand von $2:3$ abgebrochen werden. Wäre es fair, den Gewinn in diesem Verhältnis aufzuteilen? Berechnen Sie dazu die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden Spieler.

Aufgabe 5

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und seien $A_n \in \mathcal{F}$ eine Folge von Ereignissen, sodass $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_n) < \infty$. Zeigen sie, dass

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq k} A_n\right) = 0.$$