Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

universitätbonn

10. Übungsblatt

Ausgabe: 03.07.2009
Abgabe: 14.07.2009

1. Aufgabe **(3 Punkte)**

Zeigen Sie mit Hilfe eines Beispiels, dass eine Funktion $f(X_0), f(X_1), \ldots$ von einer Markov Kette nicht unbedingt eine Markov Kette ist.

Bemerkung: In den folgenden Aufgaben betrachten wir eine Markov Kette $(X_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit einem abzählbaren Zustandsraum S und stationären Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{ij} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j|X_n = i)$, $i, j \in S$. Wir verwenden die folgende Notation:

$$
\begin{aligned}
p_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}_i(X_n = j) = \mathbb{P}(X_{n+k} = j|X_k = i), \ k \in \mathbb{N} \\
f_{ij}^{(n)} &= \mathbb{P}_i(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j) = \mathbb{P}_i(\tau_j = n) \\
f_{ij} &= \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Dabei ist $\tau_j = \inf\{n > 0, X_n = j\}$ mit der üblichen Konvention $\inf \emptyset = +\infty$.

2. Aufgabe **(8 Punkte)**

Für eine irreduzible aperiodische Markov Kette X beweise man:

(a) X ist transient genau dann, wenn für ein $i \in S$ eine der folgenden Aussagen erfüllt ist

(i) $f_{ii} < 1$;

(ii) $\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ u.o.}) = 0$;

(iii) $\sum_n p_{ii}^{(n)} < \infty$.

(b) X ist rekurrent genau dann, wenn für ein $i \in S$ eine der folgenden Aussagen erfüllt ist

(i) $f_{ii} = 1$;

(ii) $\mathbb{P}_i(X_n = i \text{ u.o.}) = 1$;

(iii) $\sum_n p_{ii}^{(n)} = \infty$.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei $S = \{0, 1, \ldots\}$, $p_{00} = 1$ und $f_{i0} > 0$ für alle i.

(a) Zeigen Sie: $\mathbb{P}_i\big(\bigcup_{j=1}^{\infty}\{X_n = j \text{ i.o.}\}\big) = 0$ für alle i.

(b) Sei der Zustand eine Größe von einer Population. Erklären Sie dann die Kondition $p_{00} = 1$ und $f_{i0} > 0$ und die Folgerung aus (a).

4. Aufgabe **(4 Punkte)**

Konstruieren Sie die Skorokhod Einbettung für eine einfache Irrfahrt in $\mathbb{Z}$.
Gesamt: 20 Punkte