

9. Übungsblatt

Ausgabe: 26.06.2009

Abgabe: 07.07.2009

1. Aufgabe

(4 Punkte)

Beweisen Sie Theorem 5.4.7. aus dem Skript: Ist X_t ein Markov Prozess mit Generator L , dann ist eine nicht-negative Funktion f

- (a) harmonisch, genau dann wenn $f(X_t)$ ein Martingal ist;
- (b) subharmonisch, genau dann wenn $f(X_t)$ ein Submartingal ist;
- (c) superharmonisch, genau dann wenn $f(X_t)$ ein Supermartingal ist.

2. Aufgabe

(6 Punkte)

Betrachten Sie die (klassische) Irrfahrt auf $\{-N, -N + 1, \dots, N - 1, N\}$. Nehmen Sie an, dass dieser Prozess $+N$ vor $-N$ erreicht. Dann ist

$$h(x) = \mathbb{P}_x[\tau_N = \tau_{\{N\} \cup \{-N\}}] = \mathbb{P}_x[\tau_N < \tau_{-N}].$$

Berechnen Sie $h(x)$ und benutzen Sie das erhaltene Resultat, um die Übergangsrate der h -transformierten Irrfahrt zu berechnen.

3. Aufgabe (Wright-Fisher Modell)

(10 Punkte)

Das Wright-Fisher Modell beschreibt die Evolution einer Population in der Individuen den Typ A oder B haben. Die Gesamtanzahl der Individuen in jeder Generation ist dabei N . Das ist ein sehr einfaches Modell aus der Populationsgenetik. A und B stehen dann für zwei mögliche Ausprägungen eines Merkmals (wir nehmen an, es gibt nur diese zwei Ausprägungen).

Formal ist das Wright-Fisher Modell ein stochastischer Prozess $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit Zustandsraum $\{0, \dots, N\}$ mit

$$X_n = \text{Anzahl der Individuen vom Typ } A \text{ in der } n\text{-ten Generation.}$$

Die Anzahl der Individuen vom Typ B ist dann $N - X_n$. Ist die n -te Generation gegeben, dann zieht jedes der N Individuen der $n + 1$ -ten Generation zufällig ein Individuum aus der n -ten Generation und übernimmt sein Typ. Zeigen Sie

- (a) (X_n) ist eine Markov-Kette. Berechnen Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten.
- (b) (X_n) ist ein Martingal.
- (c) die Zustände 0 und N sind absorbierend.
- (d) $\mathbb{P}_x[\tau_{\{0, N\}} < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}_x[\tau_{\{0, N\}}] < \infty$ für alle $x \in \{0, \dots, N\}$.
- (e) Berechnen Sie mit Hilfe des Optional-Stopping Theorems die Wahrscheinlichkeiten dafür, dass der Prozess in N bzw. in 0 absorbiert wird. (Das entspricht jeweils dem Ereignis, dass die Population irgendwann nur aus A - bzw. nur aus B -Individuen besteht.)

Gesamt: 20 Punkte