Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

universitätbonn

8. Übungsblatt

Ausgabe: 19.06.2009
Abgabe: 29.06.2009

1. Aufgabe **(6 Punkte)**

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Filtration $(\mathcal{F}_n)$. Ferner seien τ_1 und τ_2 Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)$, d.h. $\tau_i : \Omega \to \mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$ und $\{\tau_i = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, 2$. Zeigen Sie:

(a) In der Definition der Stoppzeiten könnte man $\{\tau_i \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ statt $\{\tau_i = n\} \in \mathcal{F}_n$ für alle n verlangen.

(b) $\tau_1 + \tau_2, \tau_1 \vee \tau_2, \tau_1 \wedge \tau_2$ sind Stoppzeiten.

(c) $\mathcal{F}_{\tau_i} = \big\{A \in \mathcal{F} : \{\tau_i = n\} \cap A \in \mathcal{F}_n, n \in \mathbb{N}\big\}$, $i = 1, 2$, sind σ-Algebren.

(d) Gilt $\tau_1 \leq \tau_2$ P f.s., so folgt $\mathcal{F}_{\tau_1} \subset \mathcal{F}_{\tau_2}$.

2. Aufgabe **(4 Punkte)**

Gegeben seien ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und eine Filtration $(\mathcal{F}_n)$. Ferner seien S und T Stoppzeiten bezüglich $(\mathcal{F}_n)$, und $\mathcal{F}_S$ bzw. $\mathcal{F}_T$ die zugehörigen Pre-σ-Algebren. Zeigen Sie:

(a) $\mathcal{F}_{T \wedge S} = \mathcal{F}_T \cap \mathcal{F}_S$.

(b) $\mathcal{F}_{T \vee S} = \sigma(\mathcal{F}_T, \mathcal{F}_S)$.

(c) Gilt $F \in \mathcal{F}_{T \vee S}$, so folgt $F \cap \{S \leq T\} \in \mathcal{F}_T$.

(d) Gilt $S \leq T$ f.s. und ist $A \in \mathcal{F}_S$, dann ist $N = \mathbb{1}_A S + \mathbb{1}_{A^c} T$ eine Stoppzeit.

3. Aufgabe **(7 Punkte)**

Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger zentrierter Zufallsvariablen. Ferner seien $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ und $s_n^2 = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i^2]$. Für alle $\varepsilon > 0$ sei die, sogenannte *Lindeberg Bedingung*

$$s_n^{-2} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\Big[X_i^2 \mathbb{1}_{\{|X_i| > \varepsilon s_n\}}\Big] \downarrow 0$$

erfüllt. Nach Theorem 4.6.17 (vgl. auch Remark 4.6.1) gilt $s_n^{-1} S_n \to \mathcal{N}(0, 1)$ in Verteilung.

Zeigen Sie, dass für eine Folge, $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, unabhängiger zentrierter Zufallsvariablen jede der folgenden Voraussetzungen für die Lindeberg Bedingung hinreichend ist.

(a) Die Zufallsvariablen X_n sind identisch verteilt mit $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] \in (0, \infty)$.

(b) Die Zufallsvariablen X_n sind gleichmäßig beschränkt und es gilt $s_n^2 \to \infty$ für $n \to \infty$.

(c) Für alle i gilt $\mathbb{E}[X_i^2] \geq r$ und $\mathbb{E}\big[|X_i|^{2+\delta}\big] \leq C$, wobei $0 < r, \delta, C < \infty$.

(d) Es gibt ein $\delta > 0$, sodass

$$\lim_{n \to \infty} s_n^{-(2+\delta)} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}\big[|X_i|^{2+\delta}\big] = 0.$$

Diese Bedingung nennt man die *Lyapunov Bedingung*.

4. Aufgabe **(3 Punkte)**

Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}\big[X_n = n\big] = \mathbb{P}\big[X_n = -n\big] = \frac{1}{2n^\beta}, \quad \mathbb{P}\big[X_n = 0\big] = 1 - \frac{1}{n^\beta}.$$

Zeigen Sie, dass die Lindeberg Bedingung für $0 \leq \beta < 1$ erfüllt ist.

Gesamt: 20 Punkte