Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

universitätbonn

7. Übungsblatt

Ausgabe: 12.06.2009
Abgabe: 23.06.2009

1. Aufgabe **(6 Punkte)**

Es sei X_n, $n \in \mathbb{N}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen. Definiere $\mathcal{T}_n = \sigma(X_k, k \geq n)$ und $\mathcal{T} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{T}_n$. Die σ-Algebra $\mathcal{T}$ heißt *terminal σ-Algebra*, und die Menge aus $\mathcal{T}$ heißen *terminal Ereignis*. Ferner, ein $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$-wertig Zufallsvariable η heißt *entartet*, wenn es ein $c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gibt, so dass es $\eta = c$ f.s.

(a). Welches der folgende Ereignis sind $\mathcal{T}$-messbar?

$$\Big\{\lim_{n\to\infty} X_n \text{ existiert}\Big\}, \qquad \Big\{\sup_n X_n < c\Big\}, \qquad \Big\{\limsup_{n\to\infty} X_n < c\Big\}$$

$$\Big\{\sum_{n=1}^{\infty} X_n \text{ konvergiert}\Big\}, \qquad \Big\{\sum_{n=1}^{\infty} |X_n| < c\Big\}.$$

(b). Sei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_k$. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n\to\infty} X_n$ und $\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ entartete Zufallsvariablen sind.

2. Aufgabe **(4 Punkte)**

Es sei $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen mit $P(\xi_i = 0) = P(\xi_i = 2) = 1/2$. Zeigen Sie, dass $\{X_n, \mathcal{F}_n\}$ mit $X_n = \prod_{i=1}^{n} \xi_i$ und $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i, i \leq n)$ ein Martingal ist. Zeigen Sie ferner, dass es $X_n \to 0$ fast sicher, aber nicht in $\mathcal{L}^1$. Ist X_n uniformly integrable?

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal und g eine positive nichtfallende konvexe Funktion. Beweisen Sie: Für alle $t > 0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq X_k \leq n} X_k \geq x\Big) \leq \frac{\mathbb{E}g(tX_n)}{g(tx)}.$$

Insbesondere gilt

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq X_k \leq n} X_k \geq x\Big) \leq e^{-tx}\mathbb{E}e^{tX_n}.$$

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Nach dem Zerlegungssatz von Doob kann jeder Submartingal $X = \{X_n, \mathcal{F}_n\}$ in der Form

$$X_n = X_0 + M_n + A_n, \; n \in \mathbb{N}_0$$

geschrieben werden. Dabei ist $M = \{M_n, \mathcal{F}_n\}$ ein Martingal und $A = \{A_n, \mathcal{F}_n\}$ ist ein prävisibler nichtfallender Prozess mit $A_0 = 0$. Man nennt A *Kompensatror von* X.

Gegeben seien unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, mit $\mathbb{P}(\xi_1 = 1) = 1/2 = \mathbb{P}(\xi_1 = -1)$. Durch $X_0 = 0$ und $X_n = \sum_{k=1}^{n} \xi_k$ ist ein Martingal $\{X_n, \sigma(\xi_k, k \leq n)\}$ definiert. Zeigen Sie, dass $\{Y_n, \sigma(\xi_k, k \leq n)\}$ mit $Y_n = \exp(X_n)$ ein Submartingal ist, und berechnen Sie den zugehörigen Kompensator.

Gesamt: 20 Punkte