Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

5. Übungsblatt

Ausgabe: 22.05.2009
Abgabe: 02.06.2009

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass folgende Mengen zu $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ gehören:

(a) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sup_n x_n < a\}$,

(b) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| < a\}$,

(c) $\{x \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{k=1}^{n} x_k = 0 \quad \text{für mindestens ein } n > 0\}$.

2. Aufgabe **(10 Punkte)**

Es seien $X_k, k \in \mathbb{N}$ unabhängige Gauss-verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Varianz 1. Definiere, für $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0,1]$

$$Z_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{[nt]} X_k.$$

Dabei ist $[\cdot]$ die grösste natürliche Zahl kleiner als $\cdot$.

i. Zeigen Sie: $Z_n(t)$ ist ein stochastischer Prozess mit Index-Menge $[0,1]$ und Zustandsraum $\mathbb{R}$.

ii. Berechnen Sie die Kovarianz C_n von Z_n und zeigen Sie dass für alle $I \in F([0,1])$, $C_n^I \to C^I$, wobei $C(s,t) = s \wedge t$.

iii. Zeigen Sie, dass die endlich dimensionalen Verteilungen von Z_n gegen die der "Brown'schen Bewegung" (s. Skript, S. 51) für $n \to \infty$ konvergieren.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Zeigen Sie, dass 2.iii ebenfalls gilt, falls die $X's$ durch beliebige, identisch verteilte und zentrierte Zufallsvariablen ersetzt werden, unter der Annahme, dass Ihre Varianz gleich 1 ist.

Hinweis: benutzen Sie die multi-dimensionale Version des Zentralen Grenzwertssatz.

Gesamt: 20 Punkte