Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

universitätbonn

4. Übungsblatt

Ausgabe: 15.05.2009
Abgabe: 26.05.2009

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ eine σ-Algebra.

(a) Beweisen Sie die folgende Verallgemeinerung der Markovschen Ungleichung:

$$\mathbb{P}\big[|X| \geq \alpha | \mathcal{G}\big] \leq \frac{1}{\alpha^k}\mathbb{E}\big[|X|^k | \mathcal{G}\big] \quad \mathbb{P}\text{-f.s.}$$

(b) Formulieren und beweisen Sie die Hölder-Ungleichung für bedingte Erwartungen.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{F}$ σ-Algebren. Zeigen Sie:

(a) Falls $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$,

$$E\left[E[X|\mathcal{G}_2]|\mathcal{G}_1\right] = E\left[X|\mathcal{G}_1\right] \quad f.s.$$

(b) Falls $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ und $\mathbb{E}[X^2] < \infty$,

$$\mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_2])^2\big] \leq \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}_1])^2\big].$$

(Demzufolge wird die Streuung von X um der bedingten Erwartung bei wachsenden σ-Algebren kleiner.)

(c) $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}\big[\mathrm{Var}[X|\mathcal{G}]\big] + \mathrm{Var}\big[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}]\big]$, wobei $\mathrm{Var}\big[X|\mathcal{G}\big] = \mathbb{E}\big[(X - \mathbb{E}[X|\mathcal{G}])^2|\mathcal{G}\big]$.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es seien $Y_1, Y_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}[Y_1] = \mu$ und $\mathrm{Var}[Y_1] = \sigma^2$. Ferner sei N eine von den Y_n unabhängige, nichtnegative ganzzahlige Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[N^2] < \infty$. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $X := \sum_{k=1}^{N} Y_k$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Die Dichte eines zweidimensionalen Gauss-verteilten Zufallsvektors (X_1, X_2) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) \\ &\quad = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\Big[-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\Big(\frac{(x_1-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x_1-\mu_1)(x_2-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\Big)\Big]. \end{aligned}$$

Die Parameter sind jeweils $\mu_i = \mathbb{E}[X_i]$, $\sigma_i^2 = \mathrm{Var}[X_i]$ und $\rho = \mathrm{Cov}(X_1, X_2)/(\sigma_1\sigma_2)$[1]. Berechnen Sie für den Fall $\mu_1 = \mu_2 = 0$ die bedingte Erwartung $\mathbb{E}[X_1|X_2]$ und die bedingte Dichte $f_{X_1|X_2}$ (vgl. Proposition 2.2.7) von X_1 gegeben X_2. Wie erhält man aus diesem Spezialfall den Fall $(\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$.

Gesamt: 20 Punkte

[1] Für Zufallsvariablen X und Y heißt $\rho(X,Y) := \mathrm{Cov}(X,Y)/\sqrt{\mathrm{Var}(X)\mathrm{Var}(Y)}$ *Korrelationskoeffizent von* X *und* Y.