Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

Ausgabe: 24.04.2009
Abgabe: 05.05.2009

2. Übungsblatt

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Unten sind für verschiedene nichtleere Grundmengen Ω Mengenfunktionen $\mu^* : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ definiert. Entscheiden Sie (mit Beweis oder Gegenbeispiel), welche davon äußere Maße sind.

(a) Ω beliebig, für ein festes $x_0 \in \Omega$ sei $\mu^*(E) = \mathbb{1}_E(x_0)$ für alle $E \in \mathcal{P}(\Omega)$;

(b) Ω beliebig, $\mu^*(E) = 1$ für alle $E \in \mathcal{P}(\Omega)$;

(c) $\Omega = \{x, y\}$, μ^* sei definiert durch $\mu^*(\emptyset) = 0$, $\mu^*(\{x\}) = \mu^*(\{y\}) = 10$, $\mu^*(\Omega) = 1$;

(d) Ω sei eine Menge bestehend aus 100 Punkten, die in eine 10×10 Matrix angeordnet sind, $\mu^*(E)$ sei definiert als die Anzahl der Spalten, die mindestens einen Punkt aus E enthalten.

(e) $\Omega = \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $\mu^*(E) = \limsup_n \frac{1}{n} |E \cap \{1, \dots, n\}|$, wobei $|A|$ die Anzahl der Elemente in der Menge A ist.

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

(a) Es seien ν^* und λ^* äußere Maße. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu^*(E) = \nu^*(E) \vee \lambda^*(E) = \max\{\nu^*(E), \lambda^*(E)\}$$

ein äußeres Maß μ^* definiert ist.

(b) Es sei $\{\mu_n^*\}$ eine Folge von äußeren Maßen und sei $\{a_n\}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie, dass durch

$$\mu^*(E) = \sum_n a_n \mu_n^*(E)$$

ein äußeres Maß μ^* definiert ist.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es sei $\mathcal{F}_0$ die Algebra in $\mathbb{Q}$, die alle Mengen der Form $(a, b] \cap \mathbb{Q}$, $(a, \infty) \cap \mathbb{Q}$ $(a, b \in \mathbb{Q})$ und $\mathbb{Q}$ selbst enthält. Ferner sei $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{F}_0)$ die von $\mathcal{F}_0$ erzeugte σ-Algebra. Zeigen Sie

(a) $\mathcal{F}$ ist die Potenzmenge von $\mathbb{Q}$.

(b) Das Zählmaß μ (d.h. $\mu(A)$ ist die Anzahl der Punkte in der Menge A) ist σ-endlich auf $\mathcal{F}$, aber nicht auf $\mathcal{F}_0$.

(c) Es gibt Mengen $A \in \mathcal{F}$, deren Maß endlich ist, die aber nicht durch Mengen aus $\mathcal{F}_0$ approximiert werden können, d.h. es gibt keine Folge $A_n \in \mathcal{F}_0$ mit $\mu(A \triangle A_n) \to 0$.

(d) Ist λ ein Maß mit $\lambda = 2\mu$, dann gilt zwar $\lambda = \mu$ auf $\mathcal{F}_0$, aber nicht auf $\mathcal{F}$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es sei $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x, y \leq 1\}$ und sei $\mathcal{F}$ die Menge aller Mengen der Form $A \times (0, 1]$, wobei $A \in \mathcal{B}\big((0, 1]\big)$. Wir definieren μ durch $\mu(A \times (0, 1]) = \lambda(A)$, wobei λ das Lebesgue-Maß ist. Zeigen Sie: $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum und für $B = \{0 < x \leq 1, y = \frac{1}{2}\}$ gilt $\mu^*(B) = 1$ und $\mu_*(B) = 0$.

Gesamt: 20 Punkte