Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

Ausgabe: 17.04.2009
Abgabe: 28.04.2009

1.Übungsblatt

1. Aufgabe **(5 Punkte)**

Beschreiben Sie die offenen, die abgeschlossenen und die kompakten Teilmengen des metrischen Raumes $(\mathbb{Z}^d, \rho)$. Dabei bezeichnet $\mathbb{Z}$ die Menge der ganzen Zahlen und ρ ist der euklidische Abstand in $\mathbb{R}^d$. Wie sieht die zugehörige Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{Z}^d)$ aus?

2. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es sei $\{(X_n, \mathcal{A}_n, \mu_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Familie von Maßräumen, wobei die Mengen X_n paarweise disjunkt sind. Durch $X = \bigcup_n X_n$, $\mathcal{A} = \{B : B \cap X_n \in \mathcal{A}_n \text{ für alle } n\}$ und $\mu(B) = \sum_n \mu_n(B \cap X_n)$ ist ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ definiert. Zeigen Sie dazu

(a) $\mathcal{A}$ ist eine σ-Algebra;

(b) μ ist ein Maß;

(c) μ ist genau dann σ-endlich, wenn alle μ_n σ-endlich sind.

3. Aufgabe **(5 Punkte)**

Es sei $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Zeigen Sie:

(a) Aus $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$ folgt $\mu(A_1) = \mu(A_2)$.

(b) Ist der Maßraum vollständig, dann folgt aus $A_1 \in \mathcal{A}$ und $\mu(A_1 \triangle A_2) = 0$, dass $A_2 \in \mathcal{A}$ gilt.

Bemerkung: Ein Maßraum $(X, \mathcal{A}, \mu)$ heißt *vollständig*, wenn die σ-Algebra $\mathcal{A}$ alle Teilmengen der μ-Nullmengen enthält, d.h. wenn aus $B \in \mathcal{A}$, $\mu(B) = 0$ und $A \subset B$ folgt $A \in \mathcal{A}$.

4. Aufgabe **(5 Punkte)**

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei τ die von der Metrik d erzeugte Topologie. Ferner sei τ_∞ die von τ auf X^∞ induzierte Produkttopologie (vgl. Beispiele nach Thm. 1.1.1 im Skript).

(a) Zeigen Sie, dass (X^∞, ρ) mit

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d(x_n, y_n)}{1 + d(x_n, y_n)}, \quad x, y \in X^\infty$$

ein metrischer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die durch ρ auf X^∞ erzeugte Topologie mit τ_∞ übereinstimmt.

Gesamt: 20 Punkte