Institut für Angewandte Mathematik
Stochastische Prozesse

Prof. Dr. A. Bovier / Dr. E. Petrou

Ausgabe: 15.07.2009
Abgabe: $-\infty$

0. Übungsblatt

1. Aufgabe

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Irrfahrt auf $\{0,1,\dots\}$ mit Übergangmatrix

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & \dots & 0 & \dots \\ q_1 & r_1 & p_1 & & 0 & \dots \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & & \dots \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \end{bmatrix},$$

wobei

$$p_{00} = r_0, p_{01} = p_0, r_0 + p_0 = 1$$

und

$$p_{i,i} = r_i, p_{i,i-1} = q_i, p_{i,i+1} = p_i, r_i + p_i + q_i = 1, i = 1, 2, \dots$$

Berechnen Sie das invariant Mass der Irrfahrt.

2. Aufgabe

Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteile Zufallsvariablen mit Werten in $\{-1,1\}$ mit $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$, und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Irrfahrt, mit $X_0 = 0$,$X_n = \Sigma_{k=1}^n Y_k + \theta n$,wobei $\theta \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < 0 < \beta$, berechen Sie $P_0(\tau_\alpha < \tau_\beta)$, wobei $\tau_\gamma = \inf\{n : X_n = \gamma\}, \gamma = \alpha, \beta$.

3. Aufgabe

Seien $D(R)$ eine Kreisscheibe mit dem Radius $R > 0$ und $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_0}$ eine Brownsche Bewegung auf $D(R)$. Ferner sei $\tau_R = \inf\{t : B_t \in \partial D(R)\}$, wobei $\partial D(R)$ der Rand der Kreisscheibe ist. Zeigen Sie:

(a) $M_{\tau_R} = \|B_{\tau_R}\|^2 - 2\tau_R$ ist eine Martingal, wobei $\|\cdot\|$ die Euklidische Norm ist.

(b) Berechnen Sie $E[\tau_R]$.

(c) Finden Sie eine Martinal, mit dem $E[e^{\lambda \tau_R}]$ berechen werden kann, wobei $\lambda \in \mathbb{R}$ eine Konstante ist. Ferner berechen Sie den Erwartungswert.

4. Aufgabe

Seien $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängige und identisch verteile Zufallsvariablen $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt ,$\sigma > 0$, und $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner $X_n = \Sigma_{k=1}^n Y_k$. Beweisen Sie, dass $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$Z_n \equiv e^{\lambda X_n},$$

eine Supermartingal ist.

5. Aufgabe

Sei $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_0}$ eine Brownsche Bewegung. Für $r \in \mathbb{R}_+$ sei $\tilde{B}_t = B_{t+r}$. Bedingt auf $B_s = 0$ für alle $s \le r$, zeigen Sie, dass $(\tilde{B}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ eine Brownsche Bewegung ist.