Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

9. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (19.12.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe. Berechnen Sie die Fourierriehe von

$$f(\phi) = \frac{1}{1+q^2-2q\cos(\phi)}$$

wobei $0 < q < 1$.

1. (Residuensatz) *[8 Pkt]*

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{(1-a\sin(\theta))^2}, \quad 0 < a < 1.$$

Hinweis: wie in der Vorlesung, benutzen Sie die Formel $\sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$.

b)
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^x}{1+e^{\pi x}} dx.$$

Hinweis: wählen Sie den Rechteck mit Eckpunkten $\pm R, \pm R + 2i$ *als Integrationsweg.*

2. (Komplexe Integration) *[6 Pkt]*

Wir betrachten die Funktion
$$f(z) = \frac{2+3\sin(\pi z)}{z(z-1)^2}.$$

a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten und Residuen f.

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral $\int_\Gamma f(z)dz$ wobei Γ den Rand des Quadrates mit Eckpunkten $\pm(3 \pm 3i)$ bezeichnet.

3. (Maximumprinzip) *[6 Pkt]*

Man finde

a) $\sup_{|z|\leq 1} |e^z|$

b) $\sup\{|\cos z| : \mathfrak{Re}(z) \in [0, 2\pi],\ \mathfrak{Im}(z) \in [0, 2\pi]\}$

c) $\sup_{|z|\leq 1} |\exp(z^2)|$

Hinweis: nach dem Maximumprinzip muss das Maximum auf dem Rand des jeweiligen Gebietes liegen.