

8. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker“

Abgabe Montag (12.12.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe. Man finde Pole (mit Angabe der Ordnung), hebbare und wesentliche Singularitäten der Funktionen

$$f_1(z) = \frac{z^4}{(z^4 - 16)^2}, \quad f_2(z) = \frac{z}{\sin z}, \quad f_3(z) = \frac{1 - \cos z}{\sin z}.$$

1. (Pole und Singularitäten) [6 Pkt]

Man finde Pole (mit Angabe der Ordnung), hebbare und wesentliche Singularitäten der Funktionen

a) $g_1(z) = \frac{z^2 - \pi^2}{(\sin z)^2}$

b) $g_2(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}$

c) $g_3(z) = \exp\left(\frac{z}{1-z}\right)$

Hinweis: betrachten Sie die Folgen $\{z_n = \frac{n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$ und $\{w_n = \frac{n}{n-1}, n \in \mathbb{N}\}$.

2. (Komplexe Integration) [6 Pkt]

Wir betrachten die Funktion

$$f(z) = \frac{e^{tz}}{z^2(z^2 + 2z + 2)}$$

für festes $t \in \mathbb{C}$.

- a) Bestimmen Sie alle isolierten Singularitäten und Residuen von f .
- b) Berechnen Sie mit Hilfe des Residuensatzes das Integral

$$\int_{|z|=3} f(z) dz.$$

3. (Residuensatz)

[6 Pkt]

Berechnen Sie

a)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)(x^2 + b)}, \quad 0 < a < b.$$

b)

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\alpha + \beta \sin \theta}, \quad \alpha > \beta > 0$$

Hinweis: wie in der Vorlesung, benutzen Sie die Formel $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$.

4. (Satz von Rouché)

[2 Pkt]

Man bestimme die Anzahl der Nullstellen (mit Vielfachheiten gezählt) von

$$P(z) = 3z^4 - 7z + 2$$

auf $\{z \in \mathbb{C} : 1 < |z| < \frac{3}{2}\}$.