Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

7. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (5.12.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe.

a) Sei $\alpha > 0$. Berechnen Sie

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2+\alpha^2} dx$$

mit Hilfe des Residuensatz.

b) Wieviele Nullstellen hat das Polynom $P(z) = z^{20} + 5z^8 - 3z^2 + 13z + 1$ auf der Einheitskreisscheibe $U_1(0)$ mit Zentrum im Nullpunkt?

1. (Residuensatz) *[12 Pkt]*

Berechnen Sie folgende Integrale:

a)

$$\int_0^\infty \frac{x \sin x}{x^2-\beta^2} dx \quad \text{für } \beta > 0$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{1}{t^4+t^2+1} dt$$

c)

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)^3}$$

2. (Residuensatz) *[4 Pkt]*

a) Berechnen Sie $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ mit Hilfe des Residuensatz.

b) Sei $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass

$$\sin^{2n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{2^{2n+1}} \sum_{k=0}^{2n+1} \binom{2n+1}{k} (-1)^k \sin\left(\{2n-2k+1\}x\right)$$

Hinweis. Benutzen Sie $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = \frac{e^{ix}}{2i}\left(1-e^{-2ix}\right)$ *und die Binomial-Formel.*

c) Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $m < n$. Zeigen Sie mit Induktion nach m, dass

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{n}{k} = (-1)^m \binom{n-1}{m}.$$

d) Benutzen Sie Teilaufgabe a),b), c) und den Residuensatz um

$$\int_0^\infty \frac{\sin^{2n+1}(x)}{x} dx$$

zu berechnen.

3. (Satz von Rouché) *[4 Pkt]*

Wieviele Nullstellen hat das Polynom $Q(z) = z^{20} + 13z^{17} + 5z^8 - 3z^2 + 1$ auf der Einheitskreisscheibe $U_1(0)$ mit Zentrum im Nullpunkt?