Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

6. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (28.11.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe.

P.1 Welche der folgenden Funktionen lassen sich in den jeweiligen Punkt z_0 analytisch fortsetzen?

$$f_1(z) = \frac{z^2+1}{z-i},\, z_0 = i \qquad f_2(z) = \frac{e^z - 1}{z},\, z_0 = 0, \qquad f_3(z) = \frac{z}{(e^z-1)^2},\, z_0 = 0.$$

P.2 Die nachstehenden Funktionen haben alle im Punkt $z = 0$ eine Singularität:

$$g_1(z) = \frac{z}{e^z - 1}, \qquad g_2(z) = \sin\left(\frac{1}{z}\right), \qquad g_3(z) = \frac{1}{\sin z}.$$

Welche dieser Singularitäten sind isoliert? Bei den isolierten Singularitäten gebe man an, ob es sich um eine hebbare Singularität, einen Pol (Ordnung?) oder um eine wesentliche Singularität handelt.

1. (Cauchysche Integralformel) *[3 Pkt]*

Hier (und unten) sei $\Gamma_r(k) : [0, 2\pi] \to \mathbb{C},\ \theta \mapsto k + re^{i\theta}$. Berechnen Sie:

a) $\int_{\Gamma_2(0)} \frac{ze^z}{(z-1)^4} dz$

b) $\int_{\Gamma_1(0)} \frac{\sin z}{z^4} dz$

c) $\int_{\Gamma_2(2)} \frac{z}{z^4-1} dz$

2. (Komplexe Integration) *[3 Pkt]*

Sei f eine analytische Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \{1,2,3\}$ so, dass

$$\int_{\Gamma_{1/2}(k)} f(z)dz = a_k, \quad (a_k \in \mathbb{C})$$

für alle $k \in \{1,2,3\}$. Man finde

$$\int_{\Gamma_4(0)} f(z)dz, \quad \int_{\Gamma_{5/2}(0)} f(z)dz, \quad \int_{\Gamma_1(5/2)} f(z)dz.$$

3. (Komplexe Integrale) *[4 Pkt]*

Zeigen Sie:

$$I_1 := \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \cos(\theta + \sin\theta)\, d\theta = 0$$

$$I_2 := \int_0^{2\pi} e^{\cos(\theta)} \sin(\theta + \sin\theta)\, d\theta = 0.$$

Hinweis: zeigen Sie, dass $I_1 + iI_2 = 0$.

4. (Komplexe Integration) *[6 Pkt]*

In dieser Aufgabe wollen wir die folgende Formel herleiten:

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

a) Zeigen Sie zuerst, dass

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1(0)} z^\star z^m (z^\star)^n dz = \begin{cases} 1 & \text{falls } m = n \\ 0 & \text{falls } m \neq n. \end{cases}$$

b) Falls $n \geq 0$, so ist

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1(0)} z^\star (z+1)^n (z^\star + 1)^n dz = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

Hinweis: benutzen Sie die binomische Formel $(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$ zusammen mit dem Ergebnis aus Teilaufgabe a.

c) Begründen Sie letzlich, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1(0)} z^\star (z+1)^n (z^\star + 1)^n dz &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1(0)} z^\star (2 + z + z^\star)^n dz \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1(0)} \frac{(z+1)^{2n}}{z^{n+1}} dz = \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

5. (Residuensatz) *[4 Pkt]*

Berechnen Sie

$$\int_0^{2\pi} (\sin\theta)^{2n} d\theta$$

für $\theta \in \mathbb{N}$.

Hinweis: benutzen Sie, dass $\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$. Verwenden Sie dann den Residuensatz.