

4. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker“

Abgabe Montag (14.11.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe. Berechnen Sie $\int_{\gamma} x dz$ wobei γ

- a) Die orientierte Strecke von 0 bis $1 + i$ ist;
- b) der einmal im positiven Sinne durchlaufene Kreis (um den Nullpunkt) mit dem Radius R ist.

1. (Cauchy-Riemann) [4 Pkt]

Sei f eine analytische Funktion auf einem Gebiet U , und seien α, β, γ reelle Zahlen mit $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ so, dass

$$\alpha \cdot \Re(f) + \beta \cdot \Im(f) + \gamma = 0,$$

auf U . Beweisen Sie, dass f konstant ist.

2. (Exponentialfunktion und Logarithmus) [6 Pkt]

Sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} (z-1)^n.$$

Zeigen Sie:

- a) Der Konvergenzradius der obigen Potenzreihe ist gleich 1.
- b) Falls $|z-1| < 1$ ist, so gilt $\exp(f(z)) = z$.
Hinweis: betrachten Sie die Ableitung von $z \exp(-f(z))$!
- c) Es existiert ein $R > 0$, sodass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < R$ gilt : $f(\exp(z)) = z$.

3. (Komplexe Integration) [4 Pkt]

Es sei Δ das Dreieck mit den Eckpunkten 0, $2i$ und 2 , γ_1 eine im Uhrzeigersinn orientierte Kurve entlang Δ mit Anfangspunkt 0 und Endpunkt 2 sowie γ_2 eine entgegen dem Uhrzeigersinn orientierte Kurve entlang Δ mit dem selben Anfangs- und Endpunkt. Beweisen Sie direkt aus der Definition, dass folgende Gleichung gilt:

$$\int_{\gamma_1} z^3 dz = \int_{\gamma_2} z^3 dz = 4.$$

4. (Komplexe Integration)

[4 Pkt]

Es sei $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ die Kurve mit $\gamma(t) = t + i \sin(6\pi t)$.

- a) Zeichnen Sie γ in der komplexen Ebene.
- b) Berechnen Sie $\int_{\gamma} z \exp(z) dz$ direkt aus der Definition.

5. (Komplexe Integration)

[4 Pkt]

Es sei ∂E der Rand des komplexen Einheitskreises, d.h. $\partial E = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Ferner seien $a, b \in \mathbb{C} \setminus \partial E$ mit $a \neq b$. Berechnen Sie

$$\int_{\partial E} \frac{1}{(z-a) \cdot (z-b)} dz.$$

Hinweis: versuchen Sie die Funktion $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$ so umzuformen, dass Sie den Satz von Cauchy verwenden können.