Institut für Angewandte Mathematik
Wintersemester 2011
Anton Bovier

3. Übungsblatt „Mathematik III für Physiker"

Abgabe Montag (7.11.2011) in den Uebungen

Präsenzaufgabe.

a) Entwickeln Sie $\frac{2z+3}{z+1}$ nach Potenzen von $z-1$ und berechnen Sie den Konvergenzradius der resultierenden Potenzreihe.

b) Betrachten Sie die Funktion $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}, u(x+iy) = 2x^3 - 6xy^2 + x^2 - y^2 - y$. Finden Sie alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, so dass $u + iv$ differenzierbar ist.

1. (Cauchy-Riemann) *[4 Pkt]*

Man zeige, dass in Polarkoordinaten (r, θ) die Cauchy-Riemann Differentialgleichungen die Form

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

annehmen.

2. (Cauchy-Riemann) *[4 Pkt]*

Für die Funktionen $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, $u(x+iy) = x^2 - y^2 + e^{-y}\sin(x) - e^{y}\cos(x)$, finden Sie alle Funktionen $v : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, sodass $u + iv$ differenzierbar ist: .

3. (Trigonometrische Funktionen) *[4 Pkt]*

Die Funktionen cos und sin lassen sich auf die gesamte komplexe Ebene erweitern und sind dort durch

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

definiert. Zeigen Sie, dass $|\cos(z)| \geq 1$ auf dem Rand des Quadrates mit Eckpunkten $\pi n(\pm 1 \pm i)$ gilt, wobei $n \in \mathbb{N}$.

4. (Logarithmus) *[4 Pkt]*

Bestimmen Sie Real- und Imaginärteil von

$$\log(-1), \qquad \log(i), \qquad \log(-1+i), \qquad \log(2-3i)$$

5. (Exponentialfunktion) *[4 Pkt]*

Bestimmen Sie das Bild des Rechtecks

$$\{x+iy: \ x,y\in\mathbb{R}, |x-a|\le b,\ |y|\le b\}$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $b > 0$, unter der Exponentialabbildung.